

Johannes Kepler und Robert Hooke

Der Beitrag von Johannes Kepler zur Entwicklung der neuzeitlichen Astronomie und Physik ist inzwischen anerkannt. Noch zuwenig gewürdigt werden die Arbeiten von Robert Hooke. Dies ist nicht zuletzt eine Folge des äusserst schäbigen Verhaltens von Isaac Newton, der erst nach dem Tod von Hooke 1703 eingewilligt hat, die Position des Präsidenten der Royal Society einzunehmen. Seine ersten Amtshandlungen bestanden darin, alle Instrumente und Papiere von Robert Hooke zu vernichten, die sich während des 40-jährigem Wirkens von Hooke für die Society angesammelt hatten. Sogar das Portrait von Hooke liess er verbrennen, so dass die Royal Society heute von allen Vorsitzenden ein Porträt besitzt ausser von ihrem ersten.

Diese Angaben sind der Fussnote auf der Seite 51 des Büchleins "Huygens & Barrow, Newton & Hooke" von Vladimir I. Arnol'd entnommen, welches 1990 bei Birkhäuser erschienen ist. **Der vorliegende Aufsatz ist nur eine Ausarbeitung des Anhangs 1 von diesem Büchlein !** Er passt aber bestens in meine Kepler-Reihe, weil er einen weiteren, komplett unabhängigen und völlig anders gearteten Beweis für Keplers erstes Gesetz liefert.

An dieser Stelle möchte ich noch Alfred Hepp für die grosse Arbeit und die Sorgfalt danken, mit welcher er meine Handskizzen in schöne Graphiken umgesetzt hat.

1. Hooke'sche Ellipsen
2. Zentralkräfte und das zweite Kepler'sche Gesetz
3. Die Abbildungen von Zhukovskii und Bohlin
4. Die Ellipsen von Zhukovskii, Bohlin, Hooke und Kepler
5. Das Theorem von Bohlin
6. Verallgemeinerung des Theorems von Bohlin
7. Beliebige Bahnen im Gravitationsfeld und im Coulomb-Feld
8. Hooke's Analogmaschinen

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Frauenfeld, im Januar 2022

Mit L^AT_EX schön gesetzt von Alfred Hepp, Bergün, im April 2022

Version 1.1 vom 21.Januar 2022

1 Hook'sche Ellipsen

Elastisches Verhalten wird in vielen Fällen in guter Näherung durch das Gesetz von Hooke beschrieben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{r}$$

Wird ein Massenpunkt nach diesem Gesetz zum Zentrum des Koordinatensystems gezogen so ist seine Bahn eine Lösung der einfachen Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m} \cdot \vec{r} = -c \cdot \vec{r}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind Ellipsen mit Mittelpunkt in $(0/0)$. Lage und Gestalt der Ellipse werden durch die Anfangsbedingungen $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$ festgelegt. Diese beiden Vektoren legen auch die Ebene fest, in welcher die Bahn liegt. Wählt man die Koordinatenachsen so, dass sie mit den Hauptachsen der Ellipse zusammenfallen, dann sind die Bahnen bei einer entsprechenden Setzung des Zeitpunktes $t = 0$ beschrieben durch

$$x = a \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad y = b \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Diese Tatsache wird schon von Newton in seiner Proposition X bewiesen. Solche Bahnen oder Trajektorien lassen sich zum Beispiel auf einem ebenen Luftkissentisch gut realisieren. Hooke liess dazu eine Kugel in einer parabolisch geformten Schüssel rollen (seine Analog-Maschine).

Die Gesamtenergie des in zwei Dimensionen oszillierenden Teilchens bleibt konstant, wenn die Bewegung reibungsfrei abläuft. Sie beträgt

$$E_{\text{tot}} = 0.5 \cdot m \cdot v^2 + 0.5 \cdot k \cdot r^2 = 0.5 \cdot m \cdot (v^2 + c \cdot r^2)$$

Der Ausdruck $2 \cdot E_{\text{tot}}/m = v^2 + c \cdot r^2$ ist also eine Konstante der Bewegung. Dieses Resultat werden wir im Beweis von Satz 2 im Abschnitt 5 brauchen.

2 Zentralkräfte und das zweite Kepler'sche Gesetz

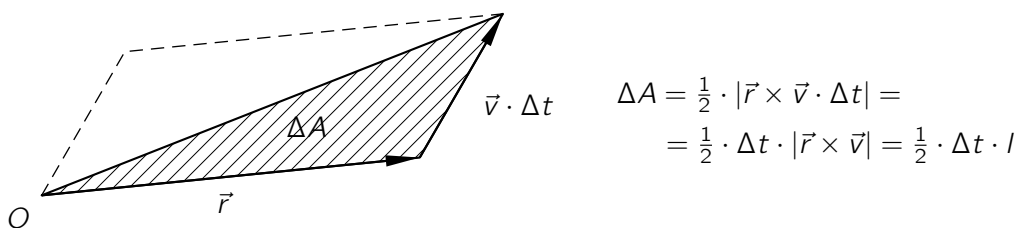
Man nennt eine Kraft eine Zentralkraft, wenn der Kraftvektor an jedem Ort parallel ist zum Ortsvektor, wenn die Kraft also überall zum Nullpunkt hin oder von diesem weg zeigt. Bahnen im Feld einer Zentralkraft sind immer eben, weil kein Kraftanteil existiert, der aus der Ebene hinauszeigt, die von $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$ festgelegt wird.

Wenn nur eine Zentralkraft wirkt, ist der Bahndrehimpuls eines Teilchens konstant: Die Kraft zeigt ja parallel zum Ortsvektor, ihr Hebelarm ist null und sie kann daher kein Drehmoment erzeugen. Etwas mathematischer argumentiert: Der Vektor $\vec{L} = \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ ist konstant. Es ist ja

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

\vec{L} ist also ein konstanter Vektor, $\vec{L} = m \cdot \vec{L}$ ist der Bahndrehimpuls des Teilchens.

Bahnen in einem zentralen Kraftfeld erfüllen immer Keplers Flächensatz: In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl (der Ortsvektor des Teilchens) gleiche Flächen:



Es ist somit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{0.5 \cdot dt \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|}{dt} = 0.5 \cdot |\vec{L}| = \text{konstant} = c_1$$

Es spielt also keine Rolle, wie genau die Zentralkraft ausgestaltet ist, der Flächensatz gilt in jedem Fall. Kepler hat sein 'zweites' Gesetz auch als erstes gefunden, und er machte dann (wie wir in diesem Aufsatz) Gebrauch davon, um das 'erste' Gesetz der elliptischen Bahnen zu finden.

Nun gilt in Polarkoordinaten auch $dA = 0.5 \cdot r^2 \cdot d\varphi$. Daraus folgt für alle Bewegungen in einem zentralen Kraftfeld

$$\frac{0.5 \cdot r^2 \cdot d\varphi}{dt} = c_1$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_2}{r^2}$$

3 Die Abbildungen von Zhukovskii und Bohlin

Bahnen im Feld einer Zentralkraft sind eben. Wir können sie daher auch mit komplexen Zahlen darstellen. Dazu definieren wir die folgenden Abbildungen in der Ebene \mathbb{C} :

$Squ(z) := z^2$	Quadratfunktion
$Zhu(z) := z + 1/z$	Abbildung von Zhukovskii
$Boh(z) := z^2 + 1/(z^2) + 2$	Abbildung von Bohlin
$Tr2(z) := z + 2$	Translation um 2
$Srt(z) := \sqrt{r} \cdot cis(\varphi/2)$ wo $z = r \cdot cis(\varphi)$	Wurzelfunktion

Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

Lemma 1 Es gilt $Boh = Squ \circ Zhu = Tr2 \circ Zhu \circ Squ$

Lemma 2 Das Bild eines Kreises $|z| = r > 1$ unter der Funktion Zhu ist eine Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Brennpunkten in +2 und -2.

Lemma 3 Das Bild eines Kreises $|z| = r > 1$ unter der Funktion Boh ist eine Ellipse mit Mittelpunkt in 2 und Brennpunkten in 0 und +4.

Lemma 4 Die Quadratfunktion Squ bildet Zhukovskii-Ellipsen mit Mittelpunkt 0 und Brennpunkten in -2 und +2 auf Bohlin-Ellipsen mit Mittelpunkt 2 und Brennpunkten in 0 und +4 ab.

Wir beweisen nur Lemma 2, alle anderen Beweise bestehen aus kleinen Kontrollrechnungen:

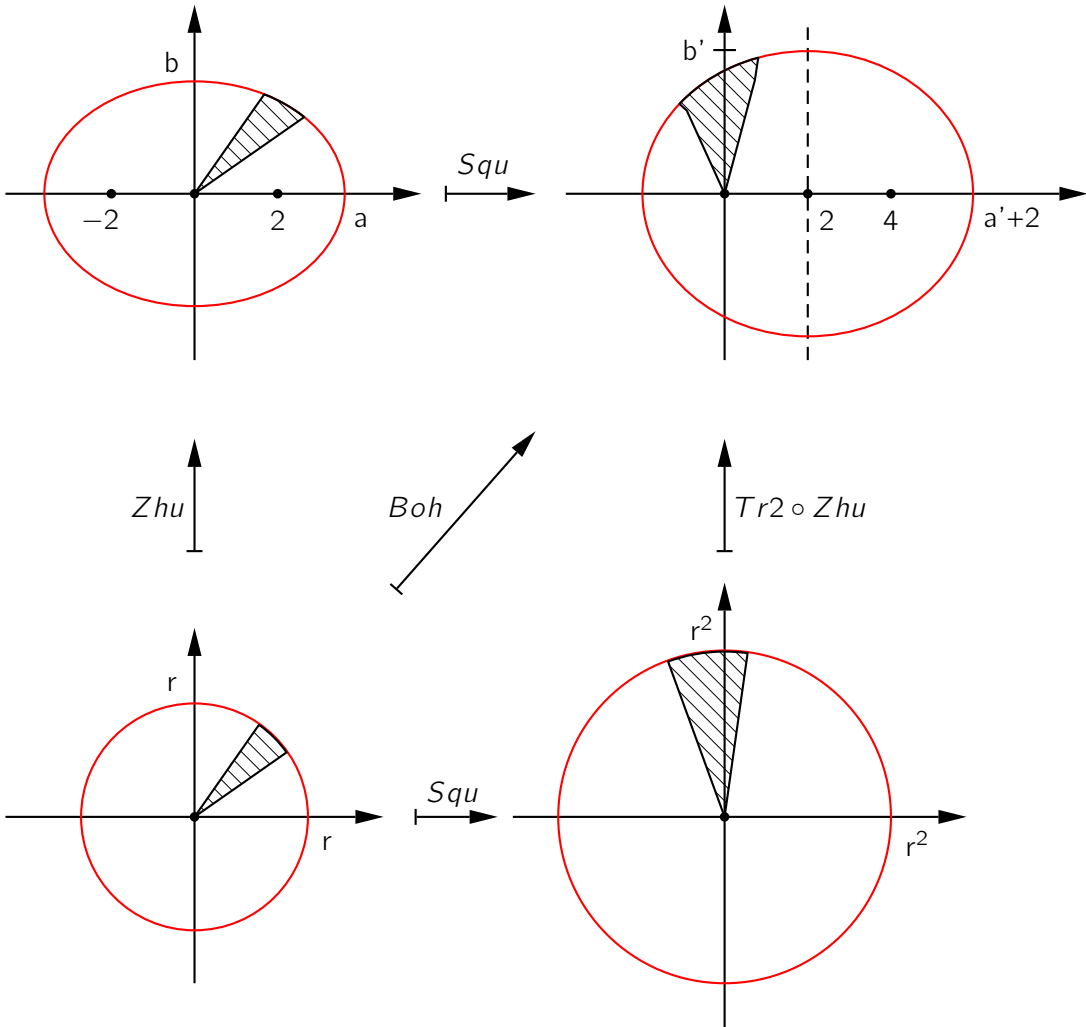
Für $z = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned} z + 1/z &= r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi) + r^{-1} \cdot \cos(-\varphi) + i \cdot r^{-1} \cdot \sin(-\varphi) = \\ &= (r + r^{-1}) \cdot \cos(\varphi) + i \cdot (r - r^{-1}) \cdot \sin(\varphi) = a \cdot \cos(\varphi) + i \cdot b \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Für die lineare Exzentrizität c gilt

$$c^2 = a^2 - b^2 = (r + r^{-1})^2 - (r - r^{-1})^2 = 2 - (-2) = 4$$

Wir können das in der Aussage zusammenfassen, dass das folgende Diagramm kommutiert:



4 Die Ellipsen von Zhukovskii, Bohlin, Hooke und Kepler

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- Hooke-Ellipsen sind beliebige Ellipsen mit Mittelpunkt im Nullpunkt
- Kepler-Ellipsen sind beliebige Ellipsen mit einem Brennpunkt im Nullpunkt
- Zhukovskii-Ellipsen sind Ellipsen mit Brennpunkten in +2 und -2, also mit Mittelpunkt in 0
- Bohlin-Ellipsen sind Ellipsen mit Brennpunkten in +4 und 0, also mit Mittelpunkt in +2

Lemma 5 Es existiert zu jedem Achsenverhältnis $x = a : b > 1$ genau eine Zhukovskii-Ellipse und genau eine Bohlin-Ellipse.

Beweis: Aus $x = a : b$ und $a^2 - b^2 = 4$ folgt $a = 2 \cdot x / \sqrt{x^2 - 1}$ und $b = 2 / \sqrt{x^2 - 1}$. Durch $a = r + r^{-1}$ und $b = r - r^{-1}$ ist $r = (a + b) / 2$ bestimmt, es gilt $r = (x + 1) / \sqrt{x^2 - 1}$. *Zhu* bildet den Kreis mit diesem Radius r auf die Ellipse mit dem gegebenen Achsenverhältnis x ab.

Für die Bohlin-Ellipsen geht der Beweis gleich, man ersetze einfach r durch r^2 .

Lemma 6 Jede Hooke-Ellipse kann durch eine Drehstreckung mit Zentrum 0 aus einer Zhukovskii-Ellipse gewonnen werden; und jede Kepler-Ellipse kann durch eine Drehstreckung mit Zentrum 0 aus einer Bohlin-Ellipse gewonnen werden.

Beweis: Wähle die Zhukovskii-Ellipse mit dem gleichen Achsenverhältnis wie die Hooke-Ellipse. Ist die Hauptachse der Hooke-Ellipse um den Winkel φ zur reellen Achse abgekippt, und ist ihre numerische Exzentrizität c , dann ist die Drehstreckung gegeben durch $h = (c/2) \cdot \text{cis}(\varphi)$. Die Multiplikation mit h bildet dann die Zhukovskii-Ellipse auf die Hooke-Ellipse ab.

Ganz analog verläuft die Begründung für Kepler-Ellipsen und Bohlin-Ellipsen.

Zu jeder Hooke-Ellipse existiert also genau ein Kreis um 0 mit $r > 1$ welcher durch die Abbildung

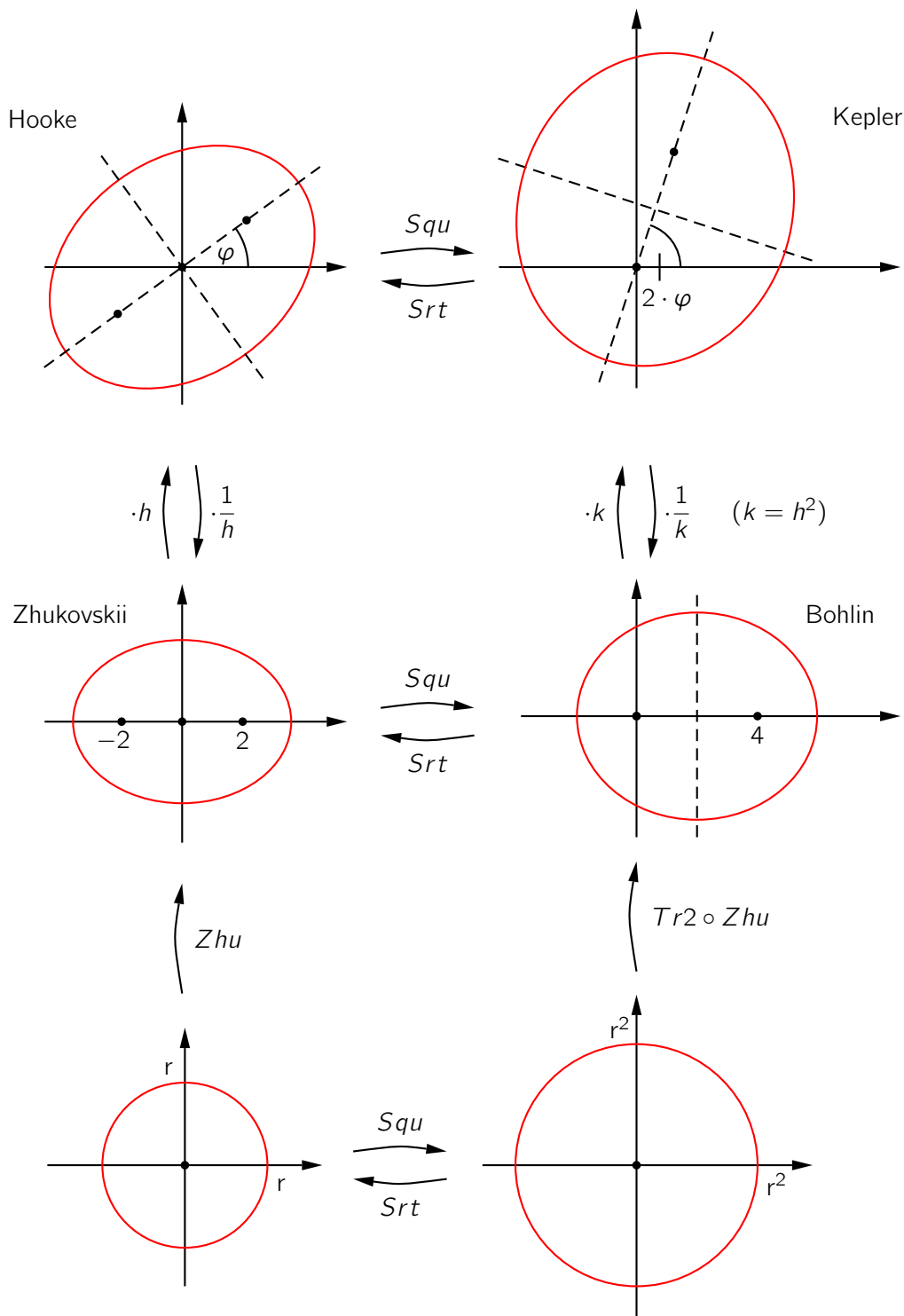
$$f(z) = h \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

auf diese Hooke-Ellipse abgebildet wird. Der Radius r des Kreises sowie die Drehstreckung h sind entsprechend den Beweisen von Lemma 5 und Lemma 6 zu wählen. Und das Entsprechende gilt für Kepler-Ellipsen.

Satz 1 Das Quadrat einer Hooke-Ellipse ist eine Kepler-Ellipse, und jede Kepler-Ellipse ist das Quadrat einer bestimmten Hooke-Ellipse.

Beweis: Lemma 4 und Lemma 6.

Die ganze Situation ist im folgenden Diagramm dargestellt. Auch wenn die Quadratfunktion keine Bijektion ist - die Kurven werden als Ganzes eindeutig aufeinander abgebildet.



5 Das Theorem von Bohlin

Wir gehen von einer Hooke-Trajektorie aus: Ein Massepunkt bewege sich in der komplexen Ebene nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\ddot{w} = -c \cdot w$$

Die Bahn des Massenpunktes ist eine Hooke-Ellipse wenn c positiv ist. Nun quadrieren wir die ganze Bewegung. Nach dem Satz 1 ist die Bahn dann eine Kepler-Ellipse. Wir zeigen nun, dass die quadrierte Bahn dem Gravitationsgesetz genügt.

Satz 2 Ein Massepunkt bewege sich in der komplexen Ebene entsprechend dem Hooke'schen Gesetz $\ddot{w} = -c \cdot w$. Wir quadrieren und führen für den Punkt $z = w^2$ eine neue Zeit τ ein, welche ebenfalls dem Flächensatz genügt. Dann genügt $z(\tau)$ dem Gravitationsgesetz

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{k \cdot z}{|z|^3}$$

Beweis: Da beide Zeiten dem Flächensatz genügen gilt nach Abschnitt 2

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_1}{|w|^2} \quad \text{und} \quad \frac{d(2 \cdot \varphi)}{dt} = \frac{c_2}{|z|^2}$$

Daraus erhält man

$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{2 \cdot \frac{d(\varphi)}{d\tau}} = \frac{d\tau}{2 \cdot dt} = \frac{\frac{c_1}{|w|^2}}{\frac{c_2}{|z|^2}} = c_3 \cdot \frac{|z|^2}{|w|^2} = c_3 \cdot \frac{|w|^4}{|w|^2} = c_3 \cdot |w|^2 = c_3 \cdot w \cdot \bar{w}$$

also

$$\frac{d\tau}{dt} = 2 \cdot c_3 \cdot w \cdot \bar{w} = c_4 \cdot w \cdot \bar{w}$$

oder

$$\frac{1}{d\tau} = \frac{c_5}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{1}{dt}$$

Damit können wir jetzt Ableitungen nach τ durch Ableitungen nach t ersetzen.

Der Einfachheit halber wählen wir die Geschwindigkeit der Zeit τ so dass die Konstante c_5 gerade 1 wird. Der Beweis könnte problemlos auch ohne diese Vereinfachung geführt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{d\tau^2} &= \frac{1}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{d}{dt} (w^2) \right) = \frac{1}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{2 \cdot w \cdot dw}{dt} \right) = \\
&= \frac{2}{w \cdot \bar{w}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{dw}{dt} \right) = \frac{2}{w \cdot \bar{w}} \cdot \left(\frac{-1}{\bar{w}^2} \cdot \frac{d\bar{w}}{dt} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = \\
&= \frac{2}{w \cdot \bar{w}} \cdot \left(\frac{-1}{\bar{w}^2} \cdot \frac{d\bar{w}}{dt} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\bar{w}} \cdot (-c \cdot w) \right) = \frac{-2}{w \cdot \bar{w}^3} \cdot \left(\frac{d\bar{w}}{dt} \cdot \frac{dw}{dt} + c \cdot w \cdot \bar{w} \right) = \\
&= \frac{-2}{w \cdot \bar{w}^3} \cdot (v^2 + c \cdot |w|^2) = \frac{-2}{w \cdot \bar{w}^3} \cdot \frac{2 \cdot E_{\text{tot}}}{m} = -k \cdot \frac{w^2}{w^3 \cdot \bar{w}^3} = -k \cdot \frac{z}{|z|^3}
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie E_{tot} des Massenpunktes auf der Hooke-Ellipse ist sicher positiv. Damit ist garantiert, dass die Konstante k auch positiv ist.

□

Kepler-Ellipsen *sind* also Bahnen in einem $1/r^2$ -Kraftfeld. Zu allen Anfangsbedingungen $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$ existiert eine solche Kepler-Ellipse. Und da die resultierende Lösung der Differentialgleichung stetig von den Anfangsbedingungen abhängt ist die jeweilige Kepler-Ellipse auch die einzige Lösung.

Diesen Satz hat der schwedische Astronom Karl Petrus Theodor Bohlin 1911 im Band 28 des Bull. Astron. publiziert. Wie diese Zeitschrift genau heisst habe ich nicht herausgefunden. Vielleicht handelt es sich um die "Astronomischen Nachrichten" des Leibnitz-Instituts für Astrophysik in Potsdam. Das ist die älteste heute noch existierende Fachzeitschrift. Sie erscheint seit 1821 zehn mal pro Jahr und wird anno 2022 vom Verlag Wiley-VCH betreut.

Die Quadratfunktion bildet also Bahnen in einem Kraftfeld, in welchem die Kraft proportional ist zum Abstand r vom Zentrum, auf Bahnen ab in einem Kraftfeld, in welchem die Kraft proportional ist zu r^{-2} . Die beiden Kraftgesetze mit den Exponenten 1 und -2 sind somit in einem gewissen Sinn dual, die Dualität wird vermittelt durch die Quadratfunktion respektive durch die Wurzelfunktion.

Dieser Gedanke lässt sich verallgemeinern, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Die Darstellung folgt weiterhin vollständig derjenigen von Arnol'd.

6 Verallgemeinerung des Theorems von Bohlin

Satz 3 Bahnen in einem zentralen Kraftfeld, in welchem die Kraft proportional ist zu r^α , werden durch die Abbildung $z = w^\gamma$ auf Bahnen in einem zentralen Kraftfeld abgebildet, in welchem die Kraft proportional ist zu r^A , falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$(\alpha + 3) \cdot (A + 3) = 4 \quad \text{und} \quad \gamma = (\alpha + 3)/2$$

Prüfen wir das am Satz von Bohlin: Beim Kraftgesetz von Hooke ist $\alpha = 1$. Die beiden Bedingungen ergeben dann die Werte $A = -2$ und $\gamma = 2$. Tatsächlich, die Quadratfunktion bildet Bahnen im Hooke-Kraftfeld auf solche im Newton'schen Gravitationsfeld ab. Startet man umgekehrt mit dem Gravitationsgesetz, also mit $\alpha = -2$, dann erhält man $A = 1$ und $\gamma = \frac{1}{2}$. Die umgekehrte Abbildung wird durch die Wurzelfunktion geleistet

Es gibt selbst-duale Kraftfelder bei den Werten $\alpha = -1$ und $\alpha = -5$. Bei $\alpha = -1$ ist die Abbildung die Identität, das ist der triviale Fall. Bei $\alpha = -5$ ist es die Kehrwertfunktion, welche die dualen Bahnen erzeugt.

Der Beweis von Satz 3 wiederholt denjenigen von Satz 2:

Die Voraussetzungen sind also

$$z = w^\gamma, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = -c_1 \cdot w \cdot |w|^{\alpha-1}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_2}{|w|^2} \quad \text{und} \quad \frac{d(\gamma \cdot \varphi)}{d\tau} = \frac{c_3}{|z|^2}$$

Einerseits gilt dann

$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d(\gamma \cdot \varphi)}{d\tau}} = \frac{d\tau}{\gamma \cdot d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\tau}{d\varphi}$$

und andererseits haben wir

$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d(\gamma \cdot \varphi)}{d\tau}} = \frac{\frac{c_2}{|w|^2}}{\frac{c_3}{|z|^2}} = c_4 \cdot \frac{|w|^{2\gamma}}{|w|^2} = c_4 \cdot |w|^{(\alpha+3)-2} = c_4 \cdot |w|^{\alpha+1}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{d\tau} = \frac{c_5}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{dt}$$

wo die Konstante c_5 wieder auf 1 gesetzt werden kann (Geschwindigkeit der Zeit τ).

Zu zeigen ist nun, dass für $z = w^\gamma = w^{(\alpha+3)/2}$ das folgende gilt:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -k \cdot z \cdot |z|^{A-1}$$

Für die konstante Gesamtenergie im ersten Kraftfeld gilt dabei

$$\frac{2 \cdot E_{\text{tot}}}{m} = |\dot{w}|^2 + \frac{2 \cdot c}{\alpha + 1} \cdot |w|^{\alpha+1} = |\dot{w}|^2 + \frac{c}{\gamma - 1} \cdot |w|^{\alpha+1}$$

Die Rechnung entspricht derjenigen von Satz 2:

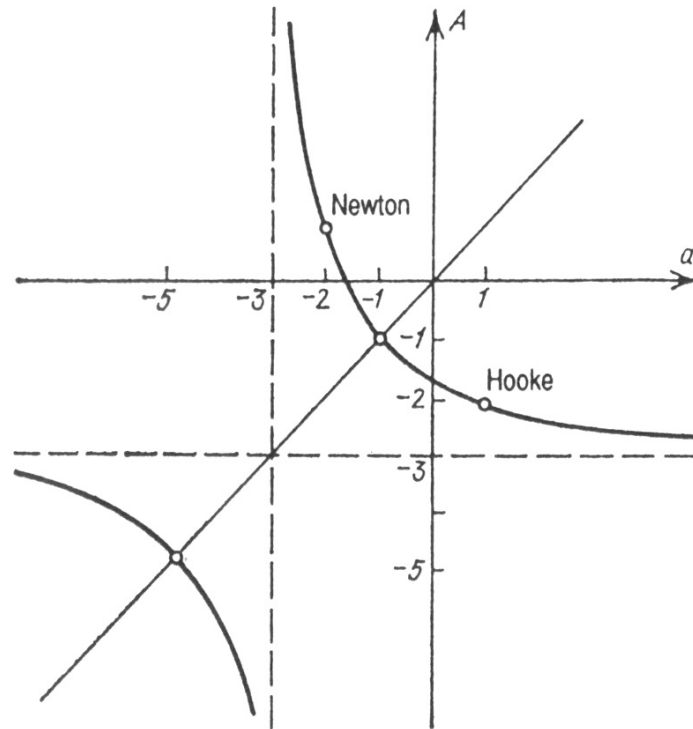
$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\tau^2} &= \frac{1}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d(w^\gamma)}{dt} \right) \right) = \frac{1}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \gamma \cdot w^{\gamma-1} \cdot \frac{dw}{dt} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w^{(\alpha+1)/2} \cdot \bar{w}^{(\alpha+1)/2}} \cdot w^{(\alpha+1)/2} \cdot \frac{dw}{dt} \right) = \frac{\gamma}{|w|^{\alpha+1}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\bar{w}^{(\alpha+1)/2}} \cdot \frac{dw}{dt} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{|w|^{\alpha+1}} \left(- \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\bar{w}^{(\alpha+1)/2-1}} \cdot \frac{d\bar{w}}{dt} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\bar{w}^{(\alpha+1)/2}} \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{|w|^{\alpha+1}} \left(- \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \cdot \frac{1}{\bar{w}^{(\alpha+1)/2-1}} \cdot v^2 + \frac{1}{\bar{w}^{(\alpha+1)/2}} \cdot (-c) \cdot w \cdot |w|^{\alpha-1} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{|w|^{\alpha+1}} \left((1-\gamma) \cdot \bar{w}^{-\frac{\alpha+3}{2}} \cdot v^2 + \bar{w}^{-\frac{\alpha+3}{2}} \cdot \bar{w} \cdot (-c) \cdot w \cdot |w|^{\alpha-1} \right) = \\ &= \frac{\gamma \cdot \bar{w}^{-\frac{\alpha+3}{2}}}{|w|^{\alpha+1}} \left((1-\gamma) \cdot v^2 - c \cdot |w|^2 \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \cdot |w|^{\alpha-1} \right) = \\ &= \frac{\gamma \cdot (1-\gamma) \cdot \bar{w}^{-\frac{\alpha+3}{2}}}{|w|^{\alpha+1}} \left(|\dot{w}|^2 + \frac{c}{\gamma-1} \cdot |w|^{\alpha+1} \right) = \\ &= \frac{\gamma \cdot (1-\gamma) \cdot \bar{w}^{-\frac{\alpha+3}{2}}}{|w|^{\alpha+1}} \left(\frac{2 \cdot E_{\text{tot}}}{m} \right) = -k \cdot \frac{1}{|w|^{\alpha+1} \cdot \bar{w}^{\frac{\alpha+3}{2}}} \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass dieser Term identisch ist mit $-k \cdot z \cdot |z|^{A-1}$:

$$\begin{aligned} z \cdot |z|^{A-1} &= w^\gamma \cdot \bar{w}^{\gamma \cdot (A-1)/2} \cdot w^{\gamma \cdot (A-1)/2} = w^\gamma \cdot \bar{w}^{1-2\gamma} \cdot w^{1-2\gamma} = \\ &= w^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot \bar{w}^{-\alpha-2} \cdot w^{-\alpha-2} = w^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot |w|^{-2 \cdot (\alpha+2)} = \frac{w^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot w^{\frac{\alpha+3}{2}}}{\bar{w}^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot |w|^{2 \cdot (\alpha+2)}} = \\ &= \frac{|w|^{\alpha+3}}{\bar{w}^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot |w|^{2\alpha+4}} = \frac{1}{\bar{w}^{\frac{\alpha+3}{2}} \cdot |w|^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

□

Arnol'd zeigt in einer schönen Skizze die Symmetrie der Zusammenhänge. Das Paar von Hooke und Newton sowie die beiden selbstdualen Fälle der Exponenten -1 und -5 sind mit einem Ringlein hervorgehoben:



Der Satz gilt unabhängig von den Vorzeichen der beiden Konstanten in den Kraftgesetzen. Bahnen bei Hooke'scher Abstossung werden zum Beispiel auf Bahnen bei Coulomb-Abstossung oder auf Bahnen mit positiver Gesamtenergie bei Newton-Anziehung abgebildet.

Das werden wir im nächsten Abschnitt zeigen.

7 Beliebige Bahnen im Gravitationsfeld und im Coulomb-Feld

Aus dem Satz 3 gewinnen wir für den Spezialfall des Gravitationsgesetzes mit seinem Exponenten -2 die folgenden Resultate:

Korollar 1 Alle Bahnen im Gravitationsfeld nach Newton werden durch die Wurzelfunktion transformiert in Bahnen in einem zentralen Kraftfeld, bei welchem die Kraft proportional ist zum Abstand vom Zentrum: $\ddot{w} = -c \cdot w$

Ist die Konstante c positiv, dann haben wir das Hooke-Feld mit seinen Hooke-Ellipsen als Lösungen der Bewegungsgleichung. Ist die Konstante c negativ so sind die Lösungen gegeben durch die hyperbolischen Funktionen

$$x = a \cdot \text{coshyp}(\omega \cdot t), \quad y = b \cdot \text{sinhyp}(\omega \cdot t)$$

und die Bahnen sind zentralsymmetrische Hyperbeln (Hooke-Hyperbeln). Ist die Konstante null, dann wirkt keine Kraft, und die Bahnen sind Geraden. Das sind alle möglichen Fälle.

Kepler-Hyperbeln sind also umgekehrt Quadrate von gewissen Hooke-Hyperbeln. Wenn wir Hooke-Hyperbel quadrieren, entstehen Kepler-Hyperbeln mit einem Brennpunkt in 0 (analoge Rechnung zu Lemma 4) oder Coulomb-Hyperbeln, wenn die Kraft abstossend ist. Quadrieren wir eine Hooke-Gerade, dann entsteht eine Kepler-Parabel. Es gilt somit der folgende

Satz 4 Bahnen im Newton'schen Kraftfeld sind Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Ellipsen gehören zu Bewegungen mit negativer Gesamtenergie, Hyperbeln zu solchen mit positiver Gesamtenergie. Die Gesamtenergie ist bei parabolischen Bahnen null.

Beweis: Dass nur diese Kegelschnitte als Bahnen möglich sind haben wir oben bereits begründet. Wir haben im Beweis definiert

$$-k = \gamma \cdot (1 - \gamma) \cdot \left(\frac{2 \cdot E_{\text{tot}}}{m} \right)$$

mit

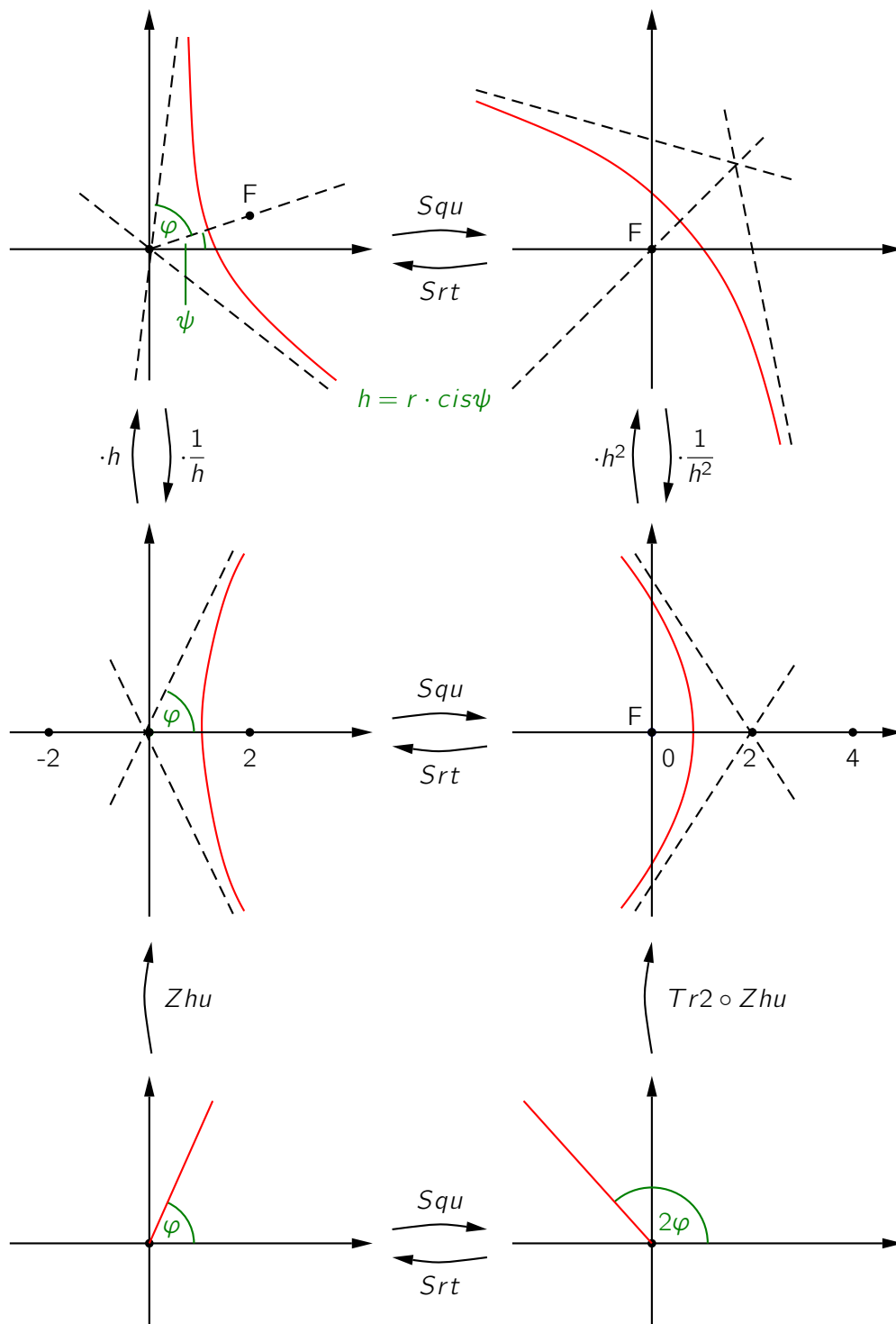
$$\alpha = -2, \quad b = 1 \quad \text{und} \quad \gamma = 1/2$$

Die Konstante $-k$ im Kraftgesetz von Hooke hat also das gleiche Vorzeichen wie die Gesamtenergie der Bewegung im Gravitationsfeld, da $1 - \gamma = 1/2$ positiv ist. Damit sind auch die Behauptungen über die Gesamtenergien bewiesen. □

Auf der nächsten Seite zeigen wir, wie alle hyperbolischen Bahnen im Gravitationsfeld mit der Zhukovskii- und der Quadratfunktion aus Geraden erzeugt werden können.

Hooke Abstossung

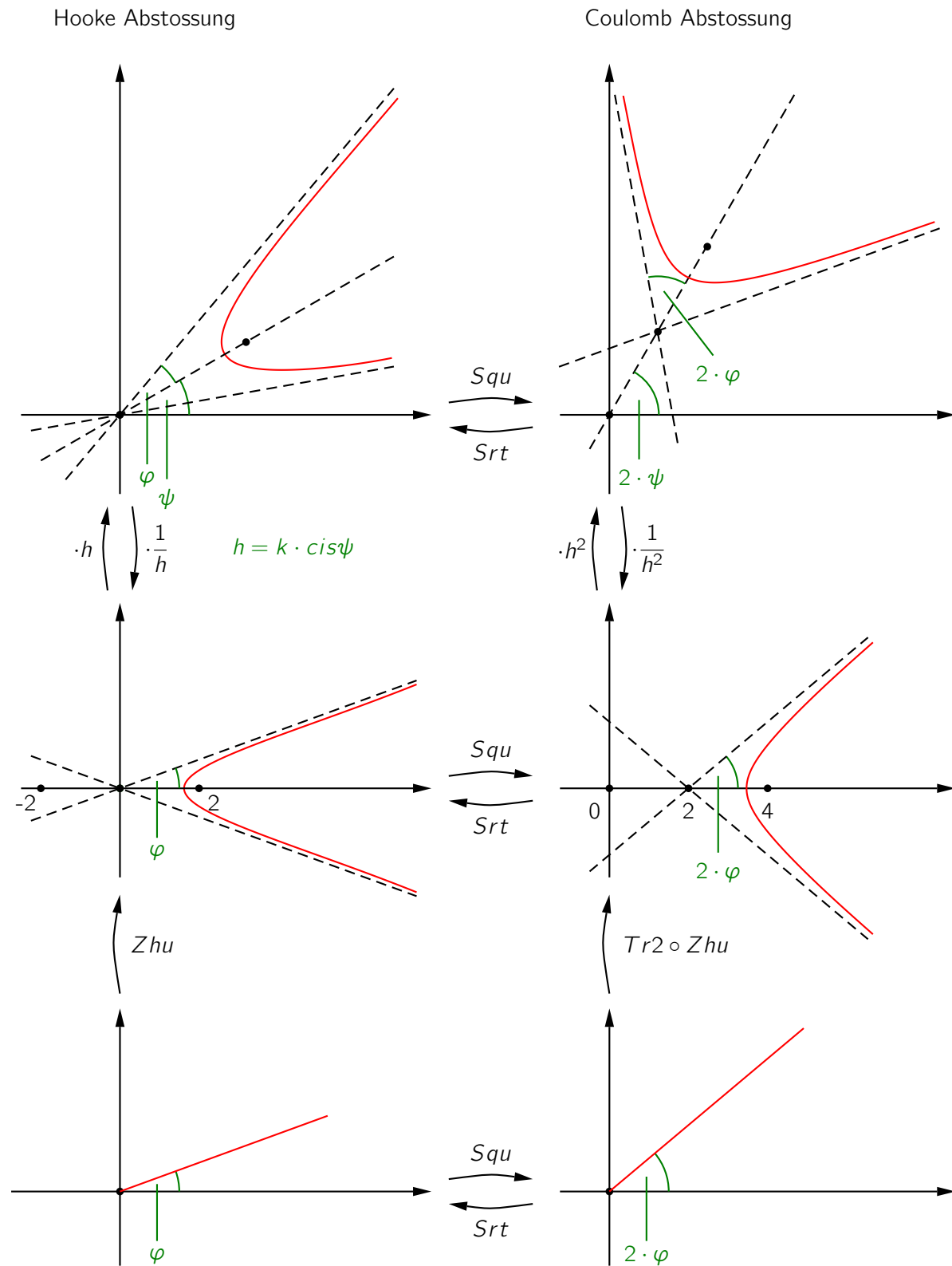
Newton Anziehung $E_{\text{tot}} > 0$



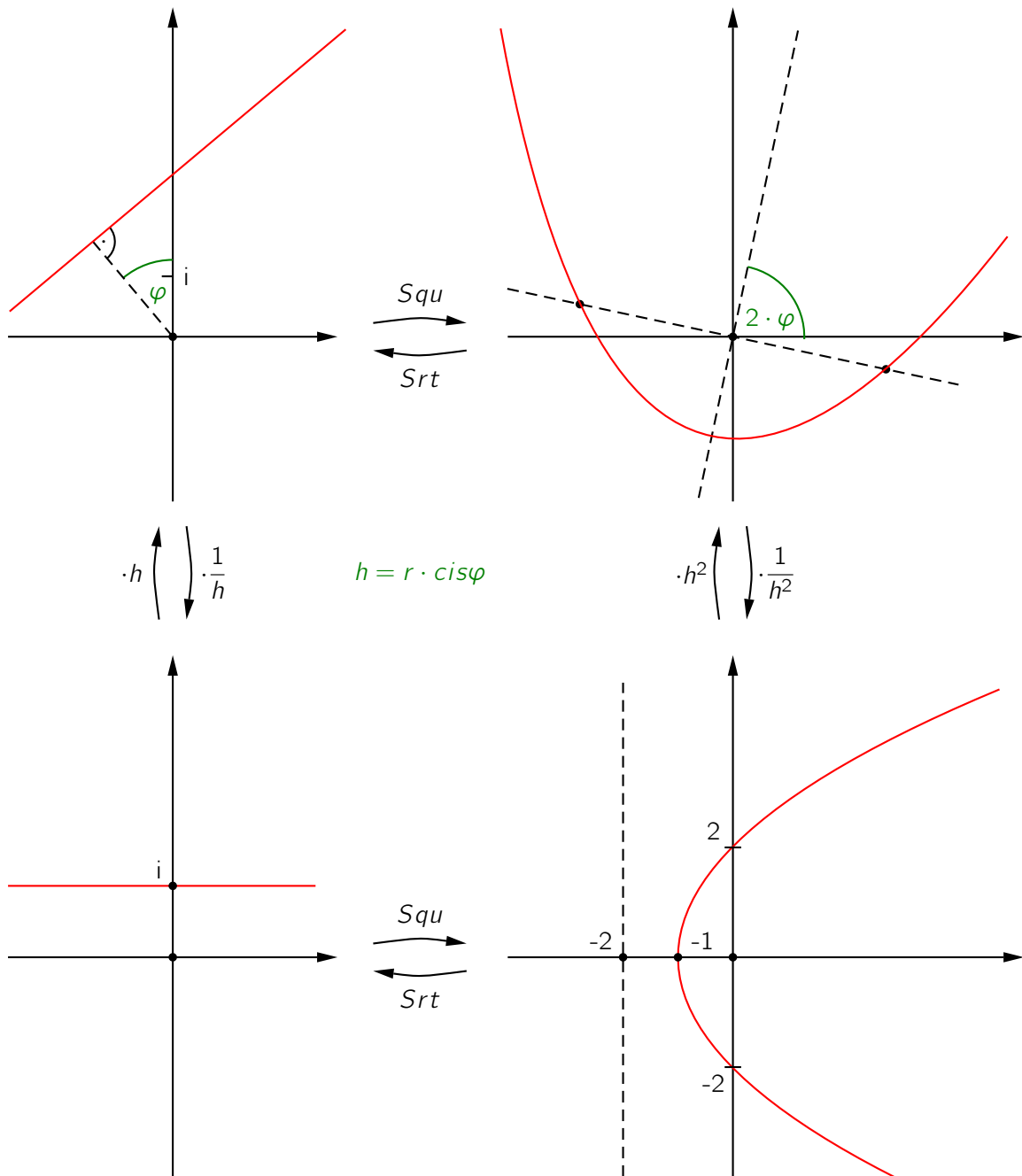
$$45^\circ < \varphi < 90^\circ!!$$

In der linken Spalte hat man zuoberst und in der Mitte Hooke-Abstossung vom Zentrum, in der rechten Spalte hat man dort Newton'sche Anziehung bei positiver Gesamtenergie. Der Winkel φ muss zwischen 45° und 90° liegen, damit beim $1/r^2$ -Gesetz Anziehung bei positiver Gesamtenergie resultiert.

Liegt der Winkel φ zwischen 0° und 45° entstehen ebenfalls Hyperbeln. Diese entsprechen den Bahnen beim $1/r^2$ -Gesetz, wenn Abstoßung vorliegt und nicht Anziehung, wie es beim Coulomb-Gesetz ja auftreten kann. Auf solchen Hyperbelbahnen bewegen sich die Alpha-Teilchen bei der Rutherford-Streuung:



Wir können auch noch für den Fall, dass die Hooke-Kraft null ist, die entsprechenden Bahnen generieren. Die Geraden im kräftefreien Feld ($c = 0$) werden durch die Quadratfunktion auf Parabeln abgebildet:



Das geht so einfach, weil alle Parabeln ähnlich sind zueinander.

Bahnen, die auf Geraden durch das Kraftzentrum liegen, genügen den Sätzen 2 und 3 auch. Es sind besonders einfache Spezialfälle. Früher hat man dabei auch von 'ausgearteten Kegelschnitten' gesprochen.

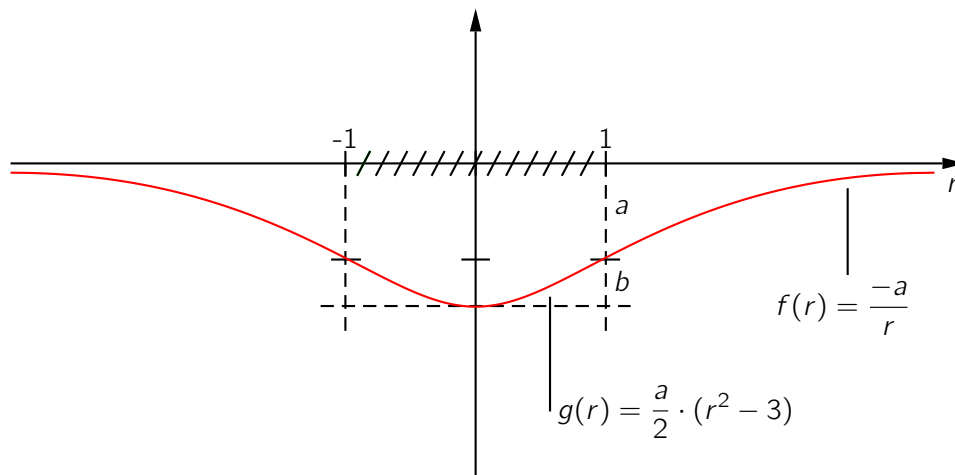
8 Hooke's Analogmaschinen

Es war Robert Hooke, der in einem Brief an Newton vorgeschlagen hat, dass die Anziehungskraft proportional zum Abstand im Quadrat abnimmt. Newton hat daraufhin den Briefwechsel mit Hooke abgebrochen. Mit seinen überragenden mathematischen Fähigkeiten konnte er schliesslich beweisen, dass in einem solchen Kraftfeld die drei Kepler'schen Gesetze gelten und umgekehrt aus den drei Keplergesetzen folgt, dass die anziehende Kraft proportional zum Abstandsquadrat abnimmt. Die systematische Darstellung 'more geometrico' führte dann zu seinem epochalen Werk der 'philosophiae naturalis principia mathematica', also der mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaften.

Hooke hat seine Einsichten in analoge Apparate umgesetzt, man könnte auch sagen dass er sie auf experimentelle Art verifiziert hat. Zu den verschiedenen Potentialen der Kraftfelder hat er Flächen konstruiert, die deren Wirkung mithilfe der Gravitation simulieren.

Zum Hooke'schen Kraftgesetz $\ddot{r} = -c \cdot r$ mit positivem Wert von c gehört ein Potential mit parabolischem Verlauf: $V(r) = b \cdot r^2$. Mit einer rollenden Kugel in einer parabolischen Satellitenschüssel lassen sich somit die Hooke'schen Ellipsen realisieren.

Zum $1/r^2$ -Gesetz gehört ein Potential vom Typ $V(r) = a \cdot r^{-1}$, also ein Hyperboloid mit der x-y-Ebene als Asymptote und der z-Achse als Pol. Heute noch lässt man in Museen Kugeln in hyperbolischen Trichtern rollen, um Ideen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu visualisieren. Zusammen mit dem Hooke-Feld im Innern einer homogenen und kugelförmigen Masse ergibt sich (ohne ART) das folgende Modell:



Newton erwähnt Hooke erst widerwillig auf Drängen seines Herausgebers Edmond Halley, und er betont dabei, dass auch Wren und Halley das $1/r^2$ -Gesetz schon vorgeschlagen hätten - dies nur um Hookes Beitrag kleiner zu machen.