Dieses Manuskript ist eine „Lesehilfe“ zum Artikel „Magic and Mathematics at the Court of Rudolph II“ von Charles B. Thomas aus „Elemente der Mathematik“, Bd. 50, Birkhäuser 1995.

Übersicht:

1 bis 4	zeigt allgemein, dass **K2** genau dann gilt, wenn die Kraft eine Zentralkraft ist
5, 6	Es wird gezeigt, dass aus **K1** und **K2** folgt, dass die Zentralbeschleunigung mit γ/r^2 abnehmen muss, wobei γ noch von Planet zu Planet verschieden sein könnte
7 bis 11	Es wird gezeigt, dass aus dem γ/r^2-Kraftgesetz folgt, dass nebst **K2** auch **K1** gelten muss
12, 13	Es wird noch gezeigt, dass **K3** (nebst **K1** und **K2**) äquivalent ist dazu, dass die Konstante γ im γ/r^2-Kraftgesetz für alle Planeten denselben Wert hat

Die eingekreisten Ziffern beziehen sich auf die Marginalien, mit denen ich das eingescannte Dokument „Kepler_06.pdf“ versehen habe.

Alle Einzelschritte werden geprüft, oder es wird auf die Stellen in Kepler_03 oder Kepler_01 verwiesen, wo diese Rechnungen nachgelesen werden könnnen.

Version 2.0, vom 20. April 2011

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im Mai 2011

1 bis 3 siehe Kepler_03, p.2-4

4 Auch ohne **K2** gilt allgemein (siehe Kepler_03, p.3)

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{(\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \sin\varphi + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \cos\varphi}{(\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos\varphi - (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \sin\varphi}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann für alle Winkel φ gleich $\tan\varphi = \sin\varphi / \cos\varphi$ sein, wenn der hintere Klammerausdruck null ist. Somit

$$\mathbf{K2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Die Kraft ist eine Zentralkraft}$$

5, 6 siehe Kepler_03, p.5 (dort k für γ ...)

Nun ist klar, dass für jeden Planeten ein γ/r^2-Gesetz gilt. γ könnte aber noch von Planet zu Planet verschieden sein!

7 Hier startet der Beweis der Umkehrung. Aus dem γ/r^2-Gesetz folgt sowieso **K2** (siehe 1 – 4), es soll nun noch **K1** hergeleitet werden.

Ausgangspunkt ist die Gleichung, die in Kepler_03, p.5 mit ($\triangle$) markiert ist.

8 Es wird nur in 7 $\dot{\varphi}$ nach **K2** durch $\frac{2c}{r^2}$ ersetzt.

9 Hier sind die drei Druckfehler. Die Rechnung ist etwas aufwendig:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \overset{!}{=} \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{2c}{r^2}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) \cdot \frac{2c}{r^2} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{2c}{r^2}\right)$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{2c}{r^2} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{2c}{r^2}\right) \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{d\varphi^2} \cdot \frac{4c^2}{r^4} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot 2c \cdot \frac{-2 \cdot r \cdot \frac{dr}{d\varphi}}{r^4} \cdot \frac{2c}{r^2}$$

$$= \frac{4c^2}{r^4} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{4c^2}{r^4} \cdot \frac{-2}{r} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

$$= \frac{4c^2}{r^2} \cdot \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{2}{r^3}\right)$$

Soweit das erste der beiden Gleichheitszeichen in 9. Nun prüfen wir noch das zweite:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\frac{dr}{d\varphi}}{r^2} = \frac{-1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\cdot\frac{dr}{d\varphi} + \frac{-1}{r^2}\cdot\frac{d^2r}{d\varphi^2} \\
&= \frac{+2\cdot r\cdot\frac{dr}{d\varphi}}{r^4}\cdot\frac{dr}{d\varphi} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2r}{d\varphi^2} \\
&= \frac{2}{r^3}\cdot\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2r}{d\varphi^2}
\end{aligned}$$

10   9 liefert $\dfrac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\dfrac{r^2}{4c^2}\cdot\ddot{r}$

Ersetzt man $\ddot{r}$ mit 8, so erhält man schon 10:

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\frac{r^2}{4c^2}\cdot\left(\frac{4c^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{4c^2}$$

11   $\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r} + \dfrac{\gamma}{4c^2}$ ist eine Differentialgleichung 2.Grades

umgeschrieben: $y'' = -y + C \qquad y = y(\varphi)$

Die allgemeine Lösung ist $y = \delta\cdot\cos(\varphi - \alpha) + C$

Also haben wir 11: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\gamma}{4c^2} + \delta\cdot\cos(\varphi-\alpha)$

Kehrwert: $r = \dfrac{1}{\frac{\gamma}{4c^2} + \delta\cdot\cos(\varphi-\alpha)} = \dfrac{4c^2/\gamma}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi-\alpha)}$

mit $p = \dfrac{4c^2}{\gamma}$ $\left(= \dfrac{4c^2}{k} \text{ in Kepler\_03}\right)$ und $\varepsilon = \delta\cdot\dfrac{4c^2}{\gamma}$ als Exzentrizität.

α legt den (willkürlichen) Startwinkel fest.

Somit haben wir

$|\vec{a}| = \dfrac{\gamma}{r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad$ **K1** und **K2**

wobei γ noch von Planet zu Planet verschieden sein könnte!

12 Oben haben wir festgehalten: $p = \dfrac{4c^2}{\gamma}$, also $\gamma = \dfrac{4c^2}{p}$

Es ist aber $c = \dfrac{dA}{dt}$ (**K2**)

Integriert über eine ganze Umlaufszeit erhalten wir die Fläche der Ellipse:

$$c \cdot T = a \cdot b \cdot \pi$$
$$c^2 \cdot T^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2$$

und damit $\gamma = \dfrac{4c^2}{p} = \dfrac{4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2}{p \cdot T^2}$

13 Um b^2 und p zu eliminieren, benutzt er jetzt die allgemein gültigen Zusammenhänge

$$b^2 = a^2 - (a \cdot \varepsilon)^2 = a^2 \cdot (1 - \varepsilon^2) \quad \text{und} \quad p = a \cdot (1 - \varepsilon^2)$$

(Einfacher wäre es, die Beziehung $a \cdot p = b^2$ zu benützen)

Wir erhalten auf jeden Fall

$$\gamma = \frac{4c^2}{p} = \frac{4 \cdot a^4 \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \pi^2}{T^2 \cdot a \cdot (1 - \varepsilon^2)} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

und wir sehen, dass γ genau dann für alle Planeten denselben Wert annimmt, wenn **K3** gilt.