Jonas Müller, 4mf, 30.4.2010

Kepler'sche Kegelschnitte & Hamilton'sche Kreise: Analyse und Lesehilfe zum Skriptum von Copetti & Keller

!√√

Allgemeines

Vorausgesetzt werden die Rechenregeln für Vektoren: sowie die folgenden Ableitungsregeln für Vektoren:

- $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$
- $(\vec{a} \times \vec{b})' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$
- $|\vec{a}|$ konst $\Rightarrow \vec{a}' \perp \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}|' = a \cdot a' \qquad (a = |\vec{a}|)$

Beweise dazu befinden sich im Skriptum von Gub!

3.) Der Drehimpulserhaltungssatz: Satz 3

$$\vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vartheta}$$

(Produktregel)

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \dot{\vec{r}} = m \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) =$$

$$= m \cdot r \left(\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[\dot{r} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\vartheta} \right] \right)$$ r ausgeklammert

$$= m \cdot r \cdot \left(\dot{r} \cdot \left[\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot r \cdot \dot{\vartheta} \right)$$ Distributivgesetz

$$= m \cdot r \cdot \left(\dot{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix} + r \cdot \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \end{pmatrix} \right)$$

$$= m \cdot r \cdot \left(\cancel{\dot{r} \cdot 0} + r \cdot \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot r^2 \cdot \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

$L = r^2 \cdot m \cdot \dot{\vartheta}$ Behauptung Skript: √√

4.) Ein nützliches Lemma

i.) $|\vec{v} - \vec{z}| = \text{konstant} \Leftrightarrow |\dot{\vec{v} - \vec{z}}| = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{z})^2 = 0 \Leftrightarrow$ ii)

$\Longleftrightarrow$

ii.) $[(\vec{v} - \vec{z})^2]' = [(\vec{v} - \vec{z}) \cdot (\vec{v} - \vec{z})]' = (\vec{v} - \vec{z})' \cdot (\vec{v} - \vec{z}) +$
$(\vec{v} - \vec{z}) \cdot (\vec{v} - \vec{z})' = 2 \cdot (\vec{v} - \vec{z}) \cdot (\vec{v} - \vec{z})' =$
$2 \cdot (\vec{v} - \vec{z}) \cdot (\vec{v}\,' - \vec{z}\,') = 2 \cdot (\vec{v} - \vec{z}) \cdot \vec{v}\,'$
$=$ iii) $= 2 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{v}\,'$ (weil $\vec{z}\,' = \text{konst.} = 0$)

damit gilt: i) $\Leftrightarrow$ ii.) $\Leftrightarrow$ iii) ✓

Wie im Skriptum begründet gilt auch iii) $\Leftrightarrow$ iv.)
weil $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$ und $\vec{a} \parallel \vec{r}$, also $\vec{a} = k \cdot \vec{r}$. ✓

5.) Von der Kegelschnittform der Bahn zur Kreisform des Hodographen

(3) ist die allgemeine Polardarstellung einer Kegelschnitt-kurve.

(5) gilt weil $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ (Kettenregel) ✓

(6) $r' = \frac{dr}{d\vartheta}\left(\frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta}\right) = \frac{(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta) \cdot \overset{=0}{p'} - p \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)'}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)^2}$

$= \frac{-p \cdot \varepsilon \cdot (-\sin\vartheta)}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)^2} = \frac{p \cdot \varepsilon \cdot \sin\vartheta}{(1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta)^2}$ ✓ da $p' = 0$

aus (3): $\frac{p}{r(\vartheta)} = 1 + \varepsilon \cdot \cos\vartheta$

$\Rightarrow \frac{p \cdot \varepsilon \cdot \sin\vartheta}{\frac{p^2}{r^2}} = \frac{r^2 \cdot \varepsilon \cdot \sin\vartheta}{p}$ ✓✓

✓

(6) in (5) eingesetzt ergibt (7)

Um (8) zu erhalten, wird Satz 3 gebraucht:

$L = r^2 \cdot m \cdot \dot{\vartheta} \Rightarrow r^2 \cdot \dot{\vartheta} = \frac{L}{m}$ einsetzen,

zusätzlich wird $\frac{\varepsilon}{p}$ ausgeklammert; ✓

deshalb wird der Bruch vor dem 2. Summanden zu $\frac{p}{\varepsilon \cdot r}$. ✓

$$(8) \quad \vec{v} = \frac{L \cdot \varepsilon}{m \cdot p} \left(\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + \frac{p}{\varepsilon \cdot r} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right)$$

$$\ldots = \ldots \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \\ \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots = \ldots \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \\ 1 - \cos^2\vartheta \end{pmatrix} + \ldots$$

$$(9) \quad \vec{v} = \frac{L \cdot \varepsilon}{m \cdot p} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos\vartheta \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} + \frac{p}{\varepsilon \cdot r} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right)$$ ✓✓ ✓

Um (10) zu erhalten wird ausmultipliziert;
zuvor wird beim letzten Summanden -1 ausgeklammert,
damit der gemeinsame Summand $\begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix}$ entsteht
und im zweiten Summanden ausgeklammert werden kann:

$$\vec{v} = \frac{L \cdot \varepsilon}{m \cdot p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{L \cdot \varepsilon}{m p} \left(\cos\vartheta \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} - \frac{p}{\varepsilon \cdot r} \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} \right)$$

$$(10) \quad \vec{v} = \frac{L \cdot \varepsilon}{m \cdot p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\frac{L \cdot \varepsilon}{m \cdot p} \cdot \left(\cos\vartheta - \frac{p}{\varepsilon \cdot r} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} \right]$$ ✓✓

Zuerst $\frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ nach links bringen!

Nun wird (10) skalar mit $\vec{r}$ multipliziert;

wobei $\left[\frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left(\cos\vartheta-\frac{p}{\varepsilon\cdot r}\right)\cdot\begin{pmatrix}\sin\vartheta\\-\cos\vartheta\end{pmatrix}\right]\cdot r\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$ (!)

$= r\cdot\left[\;\ldots\ldots\;\right]\cdot\begin{pmatrix}\sin\vartheta\\-\cos\vartheta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix}$

$=[\ldots]\cdot(\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta-\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta)=0$! ✓

Übrig bleibt (11): $\left(\vec{v}-\frac{L\varepsilon}{mp}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{r}=0.$ ✓✓

$\left(\left(\frac{L\varepsilon}{mp}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right.$ vor der Multiplikation subtrahieren!$\left.\right)$ ✓

Aus der Ursprungsannahme Lemma 1, iv.) ergibt sich:

$$(\vec{v}-\vec{z})\cdot\vec{r}=0$$

$$\Rightarrow\quad\vec{z}=\frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ ✓✓

Dieser Vektor zeigt zum Mittelpunkt des Hodographen-Kreises.

6.) Von der Kreisform des Hodographen zur Kegelschnitt-form der Bahn

(13) und (14) sind bereits bekannt, hinzu kommt

$\vec{z}=z\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta_0\\\sin\vartheta_0\end{pmatrix}$. Einsetzen in $(\vec{v}-\vec{z})\cdot\vec{r}=0$:

zuerst: $(\vec{v}-\vec{z})=r'\cdot\dot{\vartheta}\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix}+\dot{\vartheta}\cdot r\cdot\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\\cos\vartheta\end{pmatrix}-z\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta_0\\\sin\vartheta_0\end{pmatrix}$

$$(\vec{v}-\vec{z})\cdot\vec{r}=r\cdot\Big(\underline{r'\cdot\dot{\vartheta}\cdot\cos^2\vartheta}-\underline{\dot{\vartheta}\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}-z\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta_0$$
$$+\underline{r'\cdot\dot{\vartheta}\cdot\sin^2\vartheta}+\underline{\dot{\vartheta}\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}-z\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\vartheta_0\Big)$$

$$= r \cdot \Big(\underline{r' \cdot \dot{\vartheta}} - z \cdot \big(\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta_0 + \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0\big)\Big)$$

(weil $\cos^2 + \sin^2 = 1$!) und ($- \_\_ + \_\_ = 0$!) ✓

$$= r \cdot \big(r' \dot{\vartheta} - z \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta)\big)$$ Additionstheorem des Cosinus !! ✓

$$= r \cdot r' \cdot \dot{\vartheta} - r \cdot z \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta)$$ (ausmultipliziert)

(16) $\Rightarrow$ $r' \cdot \dot{\vartheta} - z \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta) = 0$ (durch r div.) ✓✓

Aus Satz 3: $L = r^2 \cdot m \cdot \dot{\vartheta} \Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{L}{m \cdot r^2}$

(16) $\Rightarrow$ einsetzen $\Rightarrow$ (17): $r' \cdot \frac{L}{mr^2} - z \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta) = 0$ ✓

(18) Standard-verfahren zum lösen einer separierbaren Differentialgleichung .....

$$\left\lceil \frac{r'(\vartheta)}{[r(\vartheta)]^2} = \frac{m}{L \cdot z} \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta) \right\rfloor$$ Platzhalter für Gub ! oder Yolan... bene ✓✓

(19) gilt aus (18) weil $\int \frac{\cancel{1}\, r'}{r^2}\, d\vartheta \overset{f}{=} -\frac{1}{r}$ Innere Ableitung als Fal… !!

und $\int \frac{mz}{L} \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta)\, d\vartheta = \frac{mz}{L} \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta) \cdot (-1) + C$ ✓

mit (-1) multiplizieren: $\frac{1}{r} = \frac{mz}{L} \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta) + C$ ✓✓ ✓

$$r(\vartheta) = \frac{1}{\frac{mz}{L} \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta) + C} = \frac{1}{C \cdot \left(1 + \frac{mz}{C \cdot L} \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta)\right)} =$$

(C im Nenner ausgeklammert)

$$= \frac{\frac{1}{C}}{1 + \frac{mz}{C \cdot L} \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta)} = (20)$$ ✓✓ ✓

$\Rightarrow \rho \to \frac{1}{C}$; $\varepsilon \to \frac{mz}{C \cdot L}$; $\Rightarrow r(\vartheta) = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta)}$ ✓

und schlussendlich mit $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = r = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\vartheta)} \quad ✓✓ \ (21)$$

7.) Charakterisierung der Lage des Anfangspunktes der Geschwindigkeitsvektoren relativ zum Hodographen

Aus (10): $|\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left|\cos\vartheta - \frac{p}{\varepsilon\cdot r}\right|\cdot\underbrace{\left|\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\right|}_{=1}$ ⇓

$$(23)\quad |\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left|\cos\vartheta - \frac{p}{\varepsilon\cdot r}\right| \quad ✓✓ \ \left(\text{weil } \sqrt{(\sin\vartheta)^2 + \cos^2\vartheta} = 1\right) ✓$$

$$= \frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left|\cancel{\cos\vartheta} - \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\cdot\left(1 + \cancel{\varepsilon\cdot\cos\vartheta}\right)\right|$$

$$= \frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left|-\frac{1}{\varepsilon}\right| = \frac{L}{m\cdot p} \quad \left(\text{weil aus } r = \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\vartheta} \Rightarrow \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\vartheta \ !\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L\cdot\varepsilon}{m\cdot p}\cdot\left|-\frac{1}{\varepsilon}\right| = \frac{L}{m\cdot p} \quad (24) \ ✓✓$$

✓ □

Satz 6

(22): $|\vec{z}| = \frac{L}{m\cdot p}\cdot\varepsilon$ (24): $|\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L}{m\cdot p}$ Radius des Hodographen!!

$$\Rightarrow |\vec{z}| = \varepsilon\cdot|\vec{v} - \vec{z}| \quad !$$

$0 < \varepsilon < 1 \iff |\vec{z}| < |\vec{v} - \vec{z}|$ Punkt O innerhalb

$\varepsilon = 1 \iff |\vec{z}| = |\vec{v} - \vec{z}|$ O auf dem Kreis

$\varepsilon > 1 \iff |\vec{z}| > |\vec{v} - \vec{z}|$ O liegt ausserhalb

$\varepsilon = 0 \iff |\vec{z}| = 0$ O = M, Bahn ist ein Kreis.

Ob die Kurve in den verschiedenen Fällen einer Ellipsenbahn, Parabelbahn oder Hyperbelbahn entspricht, (mit $r(\vartheta) = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos(\vartheta)}$)

kann im Formelbuch (MMK / DKP) S. 73 eingesehen werden.

$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ Ellipse

$\varepsilon = 1 \Rightarrow$ Parabel

$\varepsilon > 1 \Rightarrow$ Hyperbel

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ Kreis

bene !!

6.0