

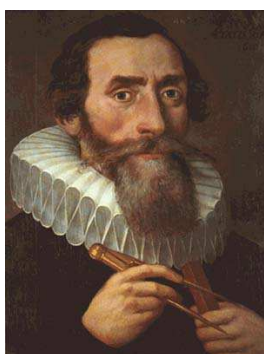
Kepler'sche Kegelschnitte und "Hamilton'sche Kreise"

G. Copetti, G. Keller
Kantonsschule Schaffhausen

5. September 2009

1 Einleitung

Der *Hodograph* eines sich bewegenden Massenpunktes ist die Kurve, die von den Spitzen der in einem gemeinsamen Anfangspunkt ansetzenden Geschwindigkeitsvektoren gebildet wird. Der Hodograph wurde 1846 von R. W. Hamilton (1805 - 1865) eingeführt.



J. Kepler (1571 - 1630)



I. Newton (1643-1727)



R. Hamilton (1805 - 1865)

Wie J. Kepler (1571 -1630) auf Grund empirischer Daten entdeckt und I. Newton (1643 - 1727) gestützt auf seine Axiome der Mechanik und dem Gravitationsgesetz nachgewiesen hat, bewegt sich ein Testkörper unter dem ausschliesslichen Einfluss des Schwerfeldes der Sonne auf einer kegelschnittförmigen Bahn, wobei die Sonne im Brennpunkt liegt. Ausgehend von diesem Faktum lässt sich zeigen, dass der Hodograph des Testkörpers ein Kreis, oder allenfalls ein Kreisbogen ist. Letzteres trifft beispielsweise bei einer hyperbelförmigen Bahn zu. Der Einfachheit halber sprechen wir von einem kreisförmigen Hodographen. Abbildung 2 zeigt den zur Ellipsenbahn von Abbildung 1 gehörigen Hodographen.

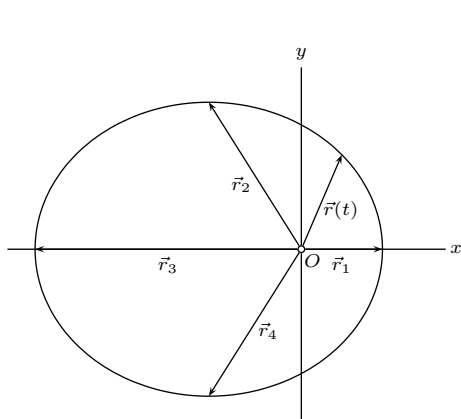


Abbildung 1: Ellipsenbahn

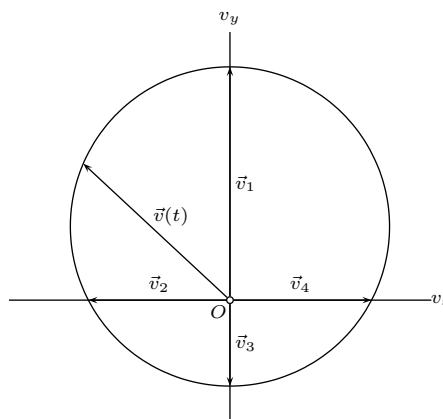


Abbildung 2: Hodograph

Die Umkehrung ist ebenfalls richtig. Ist der Hodograph eines Testkörpers kreisförmig, so ist seine Bahn ein Kegelschnitt. All das soll im Folgenden gezeigt werden.

2 Ausgangssituation

Wir betrachten einen Testkörper, der sich um die - in einem Punkt ruhende - Sonne bewegt. Auf den Testkörper wirke einzig eine von der Sonne herrührende Kraft, die stets zu $\vec{r}(t)$, dem Ortsvektor Sonne - Testkörper, kollinear ist. Eine derartige Kraft nennt man *Zentralkraft*. Je nach Richtung kann es sich um eine attraktive oder um eine repulsive Kraft handeln. In der physikalischen Realität handelt es sich um die - attraktive - Gravitationskraft. Wir behandeln (ab Abschnitt 5) nur den Fall einer attraktiven Zentralkraft¹.

3 Der Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpuls \vec{L} des Testkörpers relativ zur Sonne ist definiert als

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \quad (1)$$

wobei $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = m\dot{\vec{r}}(t)$ der Impuls des Testkörpers bedeutet.

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgrösse. Die Ableitung von \vec{L} nach der Zeit lautet:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}. \quad (2)$$

Die beiden Faktoren des ersten Vektorproduktes sind offensichtlich kollinear. Die Faktoren des zweiten sind es auch, denn $m\ddot{\vec{r}}$ ist die Kraft, die der Planet erfährt und diese Kraft ist nach Voraussetzung kollinear zum Vektor \vec{r} . Damit ist

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0}$$

und somit gilt

Satz 1. *Drehimpulserhaltungssatz:*

$$\vec{L} = \textit{konstant}.$$

Für die Gültigkeit des Drehimpulserhaltungssatzes einzig ausschlaggebend ist, dass es sich bei der Kraft, die der Testkörper erfährt, um eine Zentralkraft handelt. Der Umstand, dass ihr Betrag zu den Massen und zum Kehrwert des Quadrates des Abstandes proportional ist, spielt keine Rolle.

Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ und der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ des Planeten sind stets normal zum konstanten Vektor \vec{L} - daraus ergibt sich der folgende

Satz 2. *Die Bahn eines Testkörpers im Kraftfeld der Sonne ist eben.*

Ein (kartesisches) Koordinatensystem zur Beschreibung der Situation in Koordinaten wird man also so wählen, dass die (x, y) -Ebene mit der Bahnebene zusammenfällt und die Sonne sich im Ursprung befindet. Wir wollen für spätere Zwecke den ebenfalls konstanten Betrag L des Drehimpulses bestimmen.

Ausgedrückt durch die (ebenen) Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (r(t), \varphi(t))$ des Planeten lautet sein Ortsvektor (relativ zu einem vorübergehend um die z -Achse erweiterten Systems)

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

und sein Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}.$$

Damit wird

¹Die Überlegungen zum repulsiven Fall gestalten sich analog. Details werden in einer erweiterten Fassung des vorliegenden Textes aufgenommen.

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 m (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 m \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

und es gilt

Satz 3. Der Betrag des Drehimpulses lautet:

$$L = r^2 m \dot{\varphi}.$$

4 Ein nützliches Lemma

Wie schon aus Abbildung 2 ersichtlich, fallen offenbar der Anfangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren und der Mittelpunkt des Kreises, den die Spitzen bilden, nicht zusammen. Es stellt sich daher die Frage, wie die Kreiseigenschaft zu charakterisieren sei.

Gestützt auf Abbildung 3 erkennt man mühelos das Kriterium: Die Spitzen der im Punkt O ansetzenden Vektoren \vec{v} bilden genau dann einen Kreis, wenn es einen konstanten Vektor \vec{z} gibt derart, dass $|\vec{v} - \vec{z}|$ konstant ist.

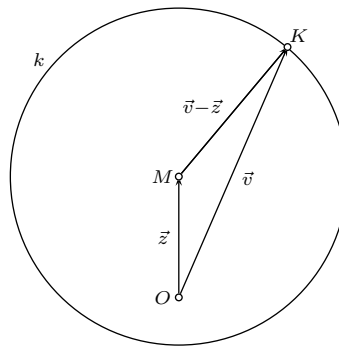


Abbildung 3

Das folgende Lemma formuliert verschiedene äquivalente Fassungen dieses Kriteriums.

Lemma 1. Es seien $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines Testkörpers, der sich im Kraftfeld der Sonne bewegt. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i) Es existiert ein Vektor $\vec{z} = \text{konstant}$ derart, dass $|\vec{v} - \vec{z}| = \text{konstant}$.
- (ii) Es existiert ein Vektor $\vec{z} = \text{konstant}$ derart, dass $\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{z})^2 = 0$.
- (iii) Es existiert ein Vektor $\vec{z} = \text{konstant}$ derart, dass $(\vec{v} - \vec{z}) \circ \dot{\vec{v}} = 0$.
- (iv) Es existiert ein Vektor $\vec{z} = \text{konstant}$ derart, dass $(\vec{v} - \vec{z}) \circ \dot{\vec{r}} = 0$.

Beweis. Es gilt

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{z})^2 = \frac{d}{dt} |\vec{v} - \vec{z}|^2 = 2(\vec{v} - \vec{z}) \circ (\dot{\vec{v}} - \dot{\vec{z}}) = 2(\vec{v} - \vec{z}) \circ \dot{\vec{v}}.$$

Daraus folgt, dass die Bedingungen (i), (ii) und (iii) äquivalent sind. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus der Tatsache, dass die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ - da stets mit gleicher Richtung wie die Zentralkraft - und der Orstvektor $\vec{r}(t)$ kollinear sind. \square

5 Von der Kegelschnittform der Bahn zur Kreisform des Hodographen

Satz 4. Die Bahn des Testkörpers sei ein Kegelschnitt mit der Sonnenposition als Brennpunkt. Dann ist der Hodograph kreisförmig.

Beweis. Zur Beweisidee: Es gilt eine der Fassungen (i) - (iv) von Lemma 1 nachzuweisen. Es wird sich (iv) als die bequemste herausstellen.

Zunächst soll der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ des Testkörpers bestimmt werden. Nach Voraussetzung ist die Bahn des Testkörpers ein Kegelschnitt, wird also in Polardarstellung durch eine Gleichung vom Typ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (p > 0, \epsilon \geq 0) \quad (3)$$

beschrieben. Der Wert des Parameters ϵ bestimmt die Art des Kegelschnitts. Für $\epsilon = 0$ stellt (3) einen Kreis dar, für $0 < \epsilon < 1$ eine Ellipse, für $\epsilon = 1$ eine Parabel und für $\epsilon > 1$ eine Hyperbel.

Der Ortsvektor des Testkörpers lautet

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Daraus ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor zunächst in folgender Gestalt:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r' \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \dot{\varphi}, \quad (5)$$

wobei $r' = \frac{d}{d\varphi}r$ und $\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\varphi$.
Mit

$$r' = \frac{\epsilon p \sin(\varphi)}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} = \frac{\epsilon r^2 \sin(\varphi)}{p} \quad (6)$$

erhält man daraus

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r^2 \dot{\varphi} \left(\frac{\epsilon \sin(\varphi)}{p} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \right). \quad (7)$$

Ersetzt man $r^2 \dot{\varphi}$, gestützt auf Satz 3, durch L/m so wird daraus

$$\vec{v} = \frac{L\epsilon}{mp} \left(\sin(\varphi) \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} + \frac{p}{\epsilon r} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

und wenn man den ersten Summanden in der Klammer unter Ausnutzung der Identität $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ umformt, erhält man zunächst

$$\vec{v} = \frac{L\epsilon}{mp} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(\varphi) \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix} + \frac{p}{\epsilon r} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

und schliesslich

$$\vec{v} = \frac{L\epsilon}{mp} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{L\epsilon}{mp} \left(\cos(\varphi) - \frac{p}{\epsilon r} \right) \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Daraus folgt

$$\left(\vec{v} - \frac{L\epsilon}{mp} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \circ \vec{r} = 0. \quad (11)$$

Also ist der Vektor \vec{z} , mit dem man Bedingung (iv) des Lemmas 1 erfüllen kann

$$\vec{z} = \frac{L\epsilon}{mp} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Damit ist Satz 4 bewiesen. \square

6 Von der Kreisform des Hodographen zur Kegelschnittform der Bahn

Die Umkehrung von Satz 4 ist ebenfalls richtig.

Satz 5. *Der Hodograph des Testkörpers sei kreisförmig. Dann ist die Bahn ein Kegelschnitt mit der Sonnenposition als Brennpunkt.*

Beweis. Wieder sei

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (13)$$

der Ortsvektor des Testkörpers und

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r' \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \dot{\varphi}. \quad (14)$$

sein Geschwindigkeitsvektor.

Die Voraussetzung von Satz 5 lässt sich in der Fassung (*iv*) des Lemmas 1 formulieren.

Mit $\vec{z} = z \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) \end{bmatrix}$ nimmt die Beziehung $(\vec{v} - \vec{z}) \circ \vec{r} = 0$ folgende Form an:

$$rr' \dot{\varphi} - rz(\cos(\varphi_0) \cos(\varphi) + \sin(\varphi_0) \sin(\varphi)) = rr' \dot{\varphi} - rz \cos(\varphi_0 - \varphi) = 0 \quad (15)$$

und nach Division durch r :

$$r' \dot{\varphi} - z \cos(\varphi_0 - \varphi) = 0 \quad (16)$$

Wegen Satz 3 gilt $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$. Gleichung (16) geht damit über in:

$$r' \frac{L}{mr^2} - z \cos(\varphi_0 - \varphi) = 0 \quad (17)$$

Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung für $r = r(\varphi)$. Mit $r' = dr/d\varphi$ erhält man

$$\int \frac{dr}{r^2} = \int \frac{mz}{L} \cos(\varphi_0 - \varphi) d\varphi \quad (18)$$

und daraus

$$\frac{1}{r} = \frac{mz}{L} \sin(\varphi_0 - \varphi) + C \quad (19)$$

sowie

$$r = r(\varphi) = \frac{\frac{1}{C}}{1 + \frac{mz}{LC} \sin(\varphi_0 - \varphi)}. \quad (20)$$

Mit $\varphi_0 = \pi/2$ und den Abkürzungen $p := 1/C$ und $\epsilon := mz/(LC) = mzp/L$ geht die Gleichung (20) über in

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}. \quad (21)$$

Das ist die Polargleichung eines Kegelschnitts. Damit ist Satz 5 bewiesen. \square

7 Charakterisierung der Lage des Anfangspunktes der Geschwindigkeitsvektoren relativ zum Hodographen

Wir greifen nochmals Abbildung 3 auf. Die Lage des Punktes O relativ zum Hodographen charakterisiert die Art des Kegelschnitts. Das soll im Folgenden gezeigt werden. Wir vergleichen zu diesem Zweck die Beträge der Vektoren \vec{z} und $\vec{v} - \vec{z}$.

Der Betrag des Vektors \vec{z} ist (siehe Gleichung (12))

$$z = |\vec{z}| = \frac{L\epsilon}{mp}. \quad (22)$$

Der Betrag von $\vec{v} - \vec{z}$ ist (siehe Gleichung (10))

$$|\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L\epsilon}{mp} \left| \cos(\varphi) - \frac{p}{\epsilon r} \right|. \quad (23)$$

Ersetzt man via Polargleichung p/r durch $1 + \epsilon \cos(\varphi)$ so wird aus Gleichung (23):

$$|\vec{v} - \vec{z}| = \frac{L}{mp}. \quad (24)$$

Durch Vergleich von (22) mit (24) gewinnt man

Satz 6.

- (i) $O = M \Leftrightarrow \epsilon = 0 \Leftrightarrow$ Bahn ist ein Kreis.
- (ii) O liegt innerhalb des Hodographen $\Leftrightarrow 0 < \epsilon < 1 \Leftrightarrow$ Bahn ist eine Ellipse.
- (iii) O liegt auf der Peripherie des Hodographen $\Leftrightarrow \epsilon = 1 \Leftrightarrow$ Bahn ist eine Parabel.
- (iv) O liegt ausserhalb des Hodographen $\Leftrightarrow \epsilon > 1 \Leftrightarrow$ Bahn ist eine Hyperbel.

8 Bildquellen und Danksagung

Die Portraits von Kepler, Newton und Hamilton stammen von: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>. Die übrigen Abbildungen verdanken die Autoren Daniel Baumgartner, Kantonsschule Baden.