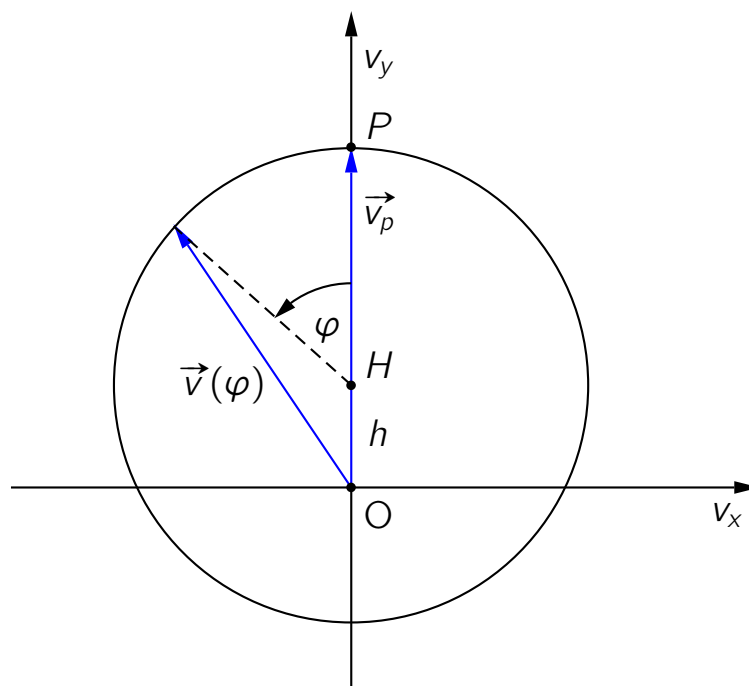


Drei Kepler ergeben einen Newton – und einen Hamilton

1. Die drei Gesetze von Kepler
2. Ebene Bahnen, die **K2** gehorchen, verlangen, dass die Kraft eine Zentralkraft ist
3. Aus **K1** und **K2** folgt, dass die Beschleunigung mit $\frac{k}{r^2}$ abnimmt
4. Aus **K3** folgt, dass die Konstante k vom Planeten unabhängig ist
5. Von der Beschleunigung zur Kraft
6. Aus **K1** und **K2** folgt die Kreisform des Hodographen
7. Nachbemerkungen



Version 1.0 vom 15. April 2011

Version 2.0, vom 20. Januar 2016

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, anno 2010/2015

Mit \LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im April 2011 und im Januar 2016

1 Die drei Gesetze von Kepler

K1 „Die Bahn eines Planeten ist eine (ebene) Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

Kepler hat dieses Gesetz nach langen Irrwegen über ‚eiförmige‘ und ‚pausbäckige‘ Bahnformen etwa 1605 als zweites gefunden. Es gilt streng nur für das sogenannte ‚Zweikörperproblem‘, also wenn man die gegenseitige Beeinflussung der Planeten ignoriert.

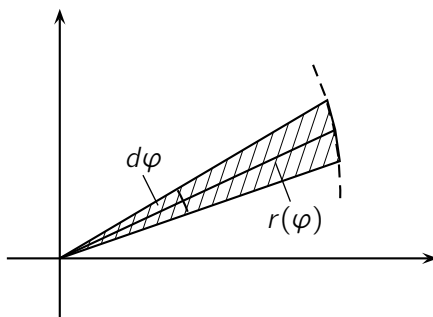
Mathematische Formulierung und Verallgemeinerung:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$$

Für $\varepsilon < 1$ resultiert eine Ellipse, für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

K2 „Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“

Diesen *Flächensatz* hat Kepler schon etwa 1603 gefunden. Er ersetzt den frühern Äquanten, welcher die unterschiedliche Geschwindigkeit des Planeten auf seiner Bahn um die Sonne beschreiben sollte.



$$dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (r \cdot d\varphi)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} = \text{konstant} = c$$

$$r^2 \cdot \dot{\varphi} = 2c = \text{konstant}$$

K3 „Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.“

Zu dieser ‚Proportion‘ schreibt Kepler selber in seiner „Weltharmonik“ auf der Seite 291: „Am 3. März dieses Jahres 1618, wenn man die genaue Zeitangabe wünscht, ist sie in meinem Kopf aufgetaucht. Ich hatte aber keine glückliche Hand, als ich sie der Rechnung unterzog, und verwarf sie als falsch. Schliesslich kam sie am 15. Mai wieder und besiegte in einem Anlauf die Finsternis meines Geistes Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, dass die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgend zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d. h. der Bahnen selber ist.“

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{oder} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = \text{konstant}$$

Für alle Planeten hat der Ausdruck $\frac{T^2}{a^3}$ denselben Wert.

2 Ebene Bahnen, die K2 gehorchen, verlangen, dass die Kraft eine Zentralkraft ist

Wir beschreiben die Bewegung in der Bahnebene in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cdot \cos \varphi(t), & \text{also } x &= r \cdot \cos \varphi \\y(t) &= r(t) \cdot \sin \varphi(t), & \text{also } y &= r \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

Abgeleitet nach der Zeit:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cdot \cos \varphi + r \cdot (-\sin \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot (\cos \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}\end{aligned}$$

Nochmals abgeleitet nach der Zeit:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r} \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot \dot{r} \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos \varphi - (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \sin \varphi = A \cdot \cos \varphi - B \cdot \sin \varphi \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \sin \varphi + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \cos \varphi = A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $A = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2)$ und $B = (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi})$. Nun quadrieren wir die beiden Terme:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^2 &= A^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + B^2 \cdot \sin^2 \varphi \\ \ddot{y}^2 &= A^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + B^2 \cdot \cos^2 \varphi\end{aligned}$$

Addieren wir diese beiden Zeilen, so erhalten wir wegen $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ den Ausdruck

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = A^2 \cdot 1 + 0 + B^2 \cdot 1$$

Somit erhalten wir für \vec{a}^2 , also für das Quadrat der Beschleunigung den Ausdruck

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2)^2 + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi})^2$$

Ganz ähnlich ergibt sich für \vec{v}^2 , also für das Quadrat der Geschwindigkeit der Ausdruck

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

Diese Rechnungen gelten soweit für beliebige ebene Bahnen.

Erst jetzt verwenden wir **K2**. Es gelte also $r^2 \cdot \dot{\varphi} = 2c = \text{konstant}$.

Die Konstante c ist vom jeweiligen Planeten abhängig. Leiten wir diese Gleichung nach der Zeit ab, so fällt diese Konstante weg:

$$\begin{aligned} 2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r^2 \cdot \ddot{\varphi} &= 0 \\ r \cdot (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $r \neq 0$ haben wir damit eine neue Formulierung von **K2** gefunden:

$$\boxed{2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} = 0}$$

Mit dieser neuen Formulierung von **K2** vereinfachen sich unsere Terme für \ddot{x} , \ddot{y} und $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$ beträchtlich:

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos \varphi \quad \ddot{y} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \sin \varphi \quad \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2)^2$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{(\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \sin \varphi}{(\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{r \cdot \sin \varphi}{r \cdot \cos \varphi} = \frac{y}{x}$$

Der Vektor der Beschleunigung \vec{a} und der Ortsvektor \vec{r} bilden also denselben Winkel φ mit der x -Achse. Die beiden Vektoren sind parallel oder antiparallel, auf jeden Fall kollinear. Die Feldlinien der Kraft laufen radial vom Nullpunkt weg oder auf diesen zu, es handelt sich also um eine Zentralkraft.

Betrachten wir noch zu einem beliebigen Zeitpunkt den Vektor

$$\vec{w} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

Für ebene Bahnen gilt ganz allgemein

$$\begin{aligned} w &= x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x} = \\ &= r \cdot \cos \varphi \cdot (\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi) - r \cdot \sin \varphi \cdot (\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi) \\ &= \cancel{r \cdot \dot{r} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi} + r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos^2 \varphi - \cancel{r \cdot \dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} + r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \varphi \\ &= r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \cdot \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Nach **K2** ist der Vektor \vec{w} konstant. Er steht senkrecht auf der Bahnebene und es gilt

$$|\vec{w}| = w = r^2 \cdot \dot{\varphi} = 2 \cdot c$$

$m \cdot \vec{w} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$ ist der *Bahndrehimpuls* des Körpers mit der Masse m . Dieser Bahndrehimpuls kann sich in einem zentralen Kraftfeld nicht ändern, weil eine Zentralkraft mangels Hebelarm kein Drehmoment erzeugen kann.

Generell sind die folgenden 4 Aussagen äquivalent:

- Es wirkt nur eine Zentralkraft längs \vec{r}
- Die Bahn ist eben und es gilt Keplers Flächensatz
- Die Bahn ist eben und es gilt $2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} = 0$
- Der Vektor $\vec{w} = \vec{r} \times \vec{v}$ ist konstant

3 Aus K1 und K2 folgt, dass die Beschleunigung mit $\frac{k}{r^2}$ abnimmt

K1 sagt $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$ p und ε sind vom Planeten abhängig

K2 sagt $r^2 \cdot \dot{\varphi} = 2c$ c ist vom Planeten abhängig

Für die Beschleunigung \vec{a} gegen den Nullpunkt haben wir im letzten Abschnitt gefunden

$$|\vec{a}|^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2)^2$$

also mit **K2** $|\vec{a}| = |\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2| = \left| \ddot{r} - \frac{1}{r^3} \cdot r^4 \cdot \dot{\varphi}^2 \right| \stackrel{!}{=} \left| \ddot{r} - \frac{1}{r^3} \cdot 4c^2 \right| \quad (\Delta)$

Mit **K1** können wir nun noch einen Ausdruck für \ddot{r} berechnen. Wir leiten dazu die Ellipsengleichung zweimal nach der Zeit ab:

$$\dot{r} = \frac{-p \cdot \varepsilon \cdot (-\sin \varphi) \cdot \dot{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} = \frac{p^2}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi}{p} = r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot \sin \varphi$$

$$\stackrel{!}{=} 2c \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot \sin \varphi$$

$$\ddot{r} = 2c \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{2c \cdot \varepsilon}{p \cdot r^2} \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{2c \cdot \varepsilon}{p \cdot r^2} \cdot 2c \cdot \cos \varphi = \frac{4c^2}{r^2} \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot \cos \varphi$$

Damit ersetzen wir nun \ddot{r} in (Δ) und erhalten unter nochmaliger Verwendung von **K1**

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \left| \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 \right| = \left| \frac{4c^2}{r^2} \cdot \frac{\varepsilon}{p} \cdot \cos \varphi - \frac{1}{r^3} \cdot 4c^2 \right| = \left| \frac{-4c^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon \cdot \cos \varphi}{p} \right) \right| \\ &\stackrel{!}{=} \left| \frac{-4c^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}{p} - \frac{\varepsilon \cdot \cos \varphi}{p} \right) \right| = \left| \frac{-4c^2}{r^2} \cdot \frac{1}{p} \right| \\ &= \frac{4c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2} \quad \text{mit } k = \frac{4c^2}{p} \end{aligned}$$

c und p haben für jeden Planeten einen anderen Wert, sind aber auch für jeden Planeten konstant.

Wir wissen jetzt: Jeder Planet ‚spürt‘ eine Zentralbeschleunigung, welche mit $\frac{k}{r^2}$ abnimmt für wachsendes r . Die Konstante k könnte aber noch für jeden Planeten eine andere sein.

Genau hier hilft **K3** weiter.

4 Aus K3 folgt, dass die Konstante k vom Planeten unabhängig ist

Zuerst verwenden wir nochmals **K1** und **K2**:

K1 \implies Die Fläche der geschlossenen Bahn ist $\pi \cdot a \cdot b$

K2 \implies Die Fläche ist $\int_T dA = \int_T \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_T 2 \cdot c \cdot dt = c \cdot \int_T dt = c \cdot T$

Somit haben wir

$$\pi \cdot a \cdot b = c \cdot T$$

wo T die Umlaufzeit bezeichnet.

Quadriert erhalten wir

$$\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = c^2 \cdot T^2$$

Für Ellipsen gilt allgemein $b^2 = a \cdot p$. Eingesetzt:

$$\pi^2 \cdot a^3 \cdot p = c^2 \cdot T^2$$

und daraus

$$\frac{c^2}{p} = \pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

K3 sagt aber gerade, dass die rechte Seite denselben Wert liefert für alle Planeten, Kometen oder Asteroiden. Die Variable $k = 4c^2/p$, die wir in 3 eingeführt haben, hat also für alle Planeten denselben Wert:

$$|\vec{a}| = \frac{4c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

ist also das *allgemeine* Gesetz, welches angibt, wie die Beschleunigung gegen den Nullpunkt mit zunehmendem Abstand r abnimmt.

Wir haben es vermieden, für $|\vec{a}|$ den einfacheren Ausdruck a zu verwenden, weil wir, ganz den Traditionen folgend, mit a oben auf der Seite schon die grosse Halbachse der Bahnellipse bezeichnet haben.

5 Von der Beschleunigung zur Kraft

Wir wissen nun, dass jeder Planet eine Beschleunigung gegen den Nullpunkt des Koordinatensystems erfährt vom Betrag

$$|\vec{a}| = \frac{k}{r^2}$$

wo k eine allgemeine Konstante ist.

Zwei weitere Schritte führen von dieser Feststellung zum Gravitationsgesetz von Newton:

Erstens muss der Begriff der Kraft *definiert* werden durch

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Wir erhalten die Kraft, die auf einen Planeten wirkt, wenn wir die Beschleunigung, die er erfährt, mit der Masse des Planeten multiplizieren.

Zweitens kommt Newtons Wechselwirkungsgesetz zum Zuge: *actio = reactio*. Diese tiefeschürfende Erkenntnis bedingt, dass auch die Masse der Sonne in den Ausdruck für die gegenseitige Anziehungskraft eingeht. Zudem erzwingt sie eine Verfeinerung der Betrachtung, da sich auch die Sonne um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Sonne – Planet bewegen muss. Eine detaillierte Untersuchung (z. B. gemäss Kepler_01.pdf, Abschnitte 10 bis 12) zeigt, dass sich daraus eine kleine Korrektur für **K3** herleitet.

Wir erhalten nun das Gravitationsgesetz von Newton:

$$\vec{F}(\text{Planet}) = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{k}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = m \cdot \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r}$$

Für jeden Planeten gilt $\frac{4c^2}{\rho} = k = G \cdot M$,

wo G die Gravitationskonstante und M die Sonnenmasse bezeichnet.

Schon Kepler hat sich eine allgemeine Anziehungskraft zwischen Massen vorgestellt. Im Vorwort zu seiner „Neuen Astronomie“ schreibt er:

„Wenn man zwei Steine an einen beliebigen Ort der Welt versetzen würde, nahe beieinander ausserhalb des Kraftbereichs eines dritten verwandten Körpers, dann würden sich jene Steine ähnlich wie zwei magnetische Körper an einem zwischenliegenden Ort vereinigen, wobei sich der eine dem anderen um eine Strecke nähert, die der Masse des anderen proportional ist.“

Die gegenseitige Anziehung von Erde und Mond war für ihn eine Tatsache, und er führt auch das Phänomen von Ebbe und Flut darauf zurück.

6 Aus K1 und K2 folgt die Kreisform des Hodographen

Dieser Abschnitt verdankt seine Entstehung komplett dem Abschnitt 4 der Publikation „Von den Hüllkurvenkonstruktionen der Kegelschnitte zu den Planetenbahnen“ von Erich Ch. Wittmann, die in den „Mathematischen Semesterberichten“ 62: p. 17–35 anno 2015 im Springer-Verlag erschienen ist. Dort wird zwar der umgekehrte Weg von Newtons Gesetzen zu den Kegelschnitten besprochen, aber die Ideen und die Rechnungen lassen sich auch hier verwenden.

Im Abschnitt 2 haben wir gesehen, dass aus **K1** und **K2** folgt

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \frac{-\vec{r}}{r} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Im Abschnitt 3 haben wir dann $|\vec{a}|$ berechnet. Es gilt demnach

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{4c^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi}$$

Setzen wir ein, was auf der Seite 2 bei **K2** steht, erhalten wir

$$\frac{1}{2}r^2 = c \cdot \frac{dt}{d\varphi}, \text{ also } \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{2c}$$

Damit erhalten wir, wieder mit der Kettenregel, die folgende, überraschend einfache Gleichung

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{4c^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^2}{2c} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{2c}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Integration nach φ liefert daraus mühelos den Hodographen

$$\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{2c}{\rho} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $\rho = \frac{2c}{p}$ und dem Mittelpunkt $H = (h_1/h_2)$.

Für $\varphi = 0$ ist die maximale Geschwindigkeit im Perihel erreicht, der Ort liegt dann auf der positiven x -Achse und die Geschwindigkeit zeigt in die positive y -Richtung. Für den Mittelpunkt H des Hodographen können wir daher schreiben

$$H = (0/h)$$

Es gilt

$$\rho = \frac{2c}{p} = \frac{w}{p} = \frac{4c^2}{p} \cdot \frac{1}{2c} = \frac{k}{2c} = \frac{G \cdot M}{w}$$

ρ hat auch die Einheiten „Meter pro Sekunde“.

Im Perihel stehen \vec{r} und \vec{v} senkrecht aufeinander. Dann gilt

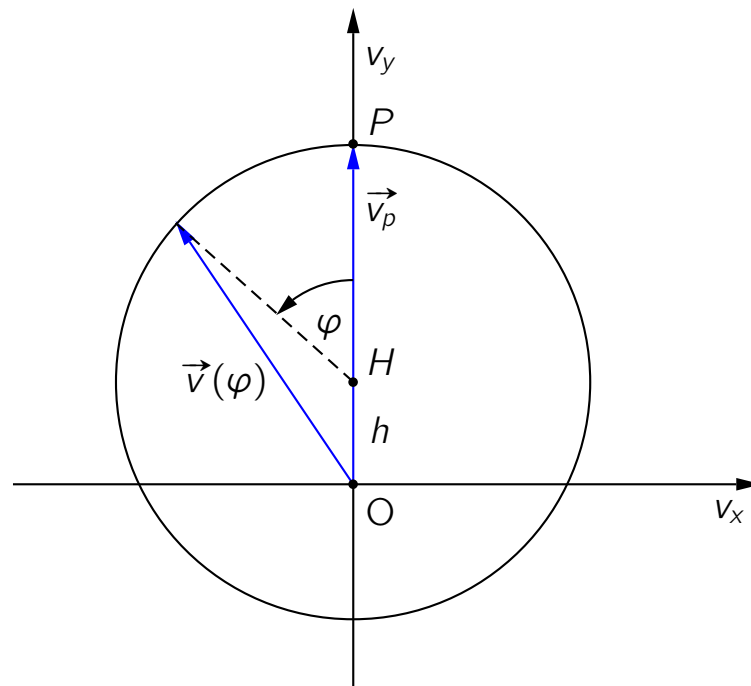
$$w = r_p \cdot v_p = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cdot \cos 0} \cdot v_p = \frac{\rho}{1 + \varepsilon} \cdot v_p$$

also

$$v_p = \frac{w}{\rho} \cdot (1 + \varepsilon) = \rho + \varepsilon \cdot \rho = \rho + h = v_{\max}$$

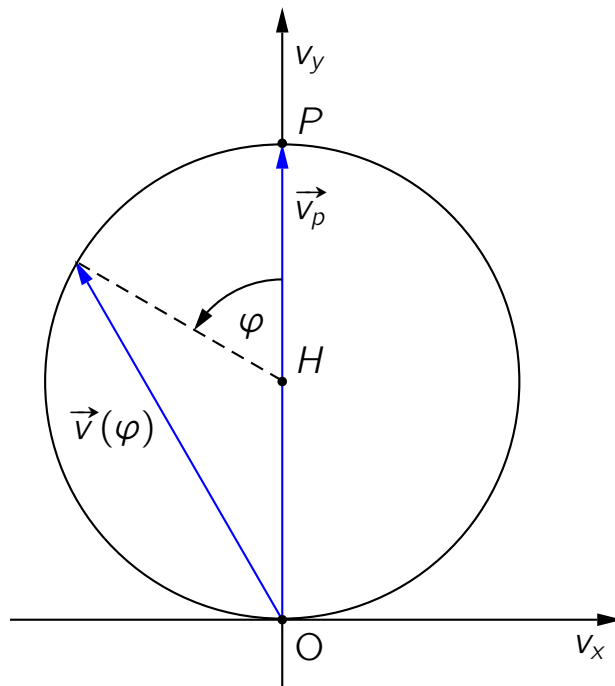
Damit ist auch $h = \varepsilon \cdot \rho$ bestimmt.

Für Ellipsen ist $h < \rho$, der Mittelpunkt des Hodographen liegt im Innern des Kreises:

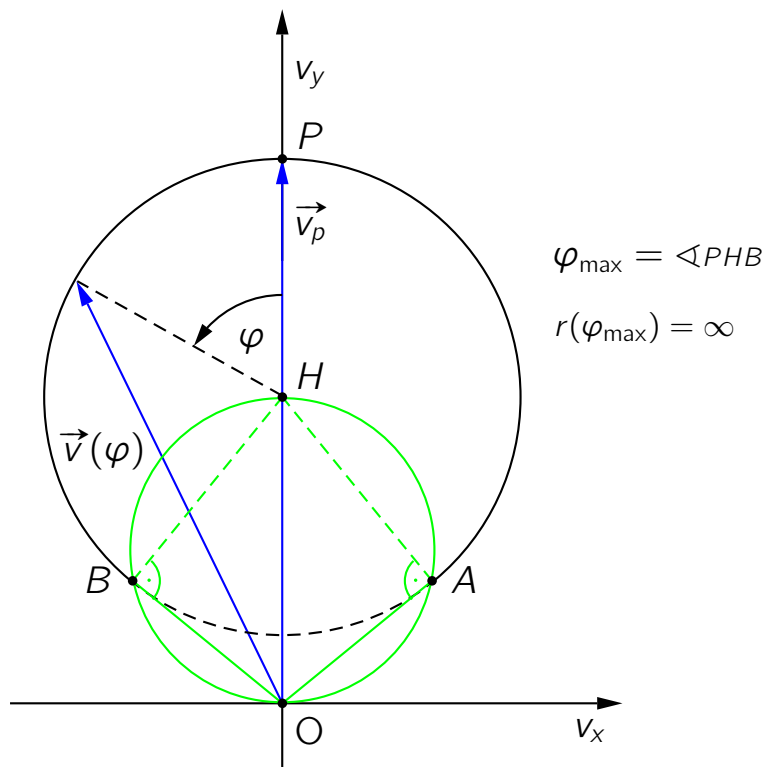


Aus der Symmetrie der \cos -Funktion und der Beschreibung der Bahn in Polarkoordinaten folgt die Symmetrie der Bahn bezüglich der x -Achse. Aus der Symmetrie der Bahn und **K2** folgt aber die Symmetrie des Hodographen, wie sie in der obigen Figur schön zum Ausdruck kommt. Das ist eine weitere Begründung dafür, dass die Integrationskonstante h_1 null sein muss.

Bei Parabeln mit $\varepsilon = 1$ ist $h = \rho$, der Nullpunkt O des Graphen liegt auf dem Kreis:



Für Hyperbeln mit $\varepsilon > 1$ liegt O ausserhalb des Hodographen. Es wird nur der Bogen APB als Geschwindigkeit realisiert. A und B sind durch den Thaleskreis über \overline{OH} bestimmt:



7 Nachbemerkungen

Wir wollen die folgenden Abkürzungen verwenden, um die logische Abhängigkeit der verschiedenen Aussagen darzustellen:

K1	Die Bahnen der Planeten sind (ebene) Ellipsen	$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}$
K2	Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen	$r^2 \cdot \dot{\varphi} = 2c = \text{konstant}$
K3	Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen	$\frac{4c^2}{p} = k = \text{konstant}$
H	Der Hodograph ist kreisförmig (also auch eben)	$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = \rho \cdot \frac{-\vec{r}}{r}$
Z	Es wirkt eine Zentralkraft	$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{w} = \text{konstant}$
N	Newtons Gravitationsgesetz	$\vec{a} = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{r}$

Wir halten zuerst fest

$$\mathbf{R0} \quad \mathbf{N} \implies \mathbf{Z} \implies \mathbf{K2}$$

Weiter gelten

R1 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) **Z**
- ii) **K2** und „die Bahn ist eben“

Beweis: Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit Kepler_03.pdf

R2 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) **Z** und **H**
- ii) **K1** und **K2**

Beweise:

- i) \iff ii) Copetti & Keller in Kepler_04.pdf
- i) \implies ii) nach **R1** und dem Abschnitt 8 von Wittmann ¹⁾
- ii) \implies i) in der vorliegenden Arbeit Kepler_03.pdf

R3 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) **N**
- ii) **K1** und **K2** und **K3**
- iii) **H** und **K2** und **K3**
- iv) **H** und **Z** und **K3**

Beweis:

- i) \implies ii) Kepler_01.pdf oder Kepler_09.pdf oder Wittmann ¹⁾
- ii) \implies i) Kepler_03.pdf
- ii) \implies iii) Kepler_03.pdf
- ii) \iff iii) Copetti & Keller in Kepler_04.pdf
- ii) \iff iv) nach **R2**

¹⁾ Wittmann, Erich Ch.
„Von der Hüllkurvenkonstruktion der Kegelschnitte zu den Planetenbahnen“
Mathematische Semesterberichte (2015) 62: 17–35
Springer-Verlag 2015