

1 Berechnung von Flächen in der Ebene

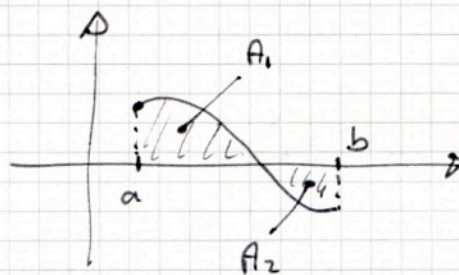
1.1 Voraussetzungen

Vorausgesetzt wird das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ über einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ als Limit der Unte- oder Obersumme $\sum f(x_i) \cdot \Delta x$ für $\Delta x \rightarrow 0$ sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ wo } F'(x) = f(x)$$

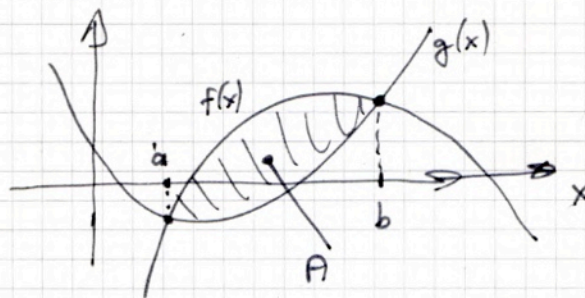
Diese Konzepte werden in Grundlagenfach (Grundkurs) Mathematik eingeführt.

Setz:



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2$$

Werte:

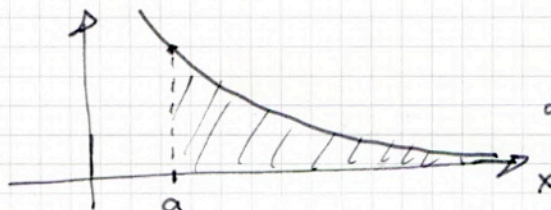


$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Setz:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Setz:



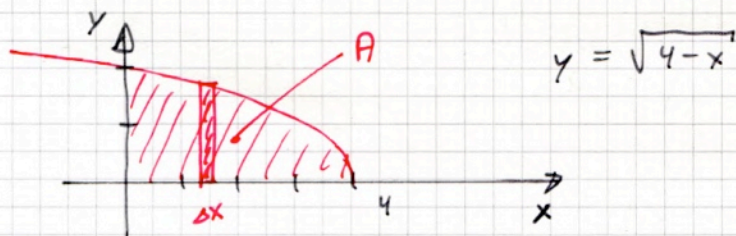
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

"uneigentliches Integral"

1.2

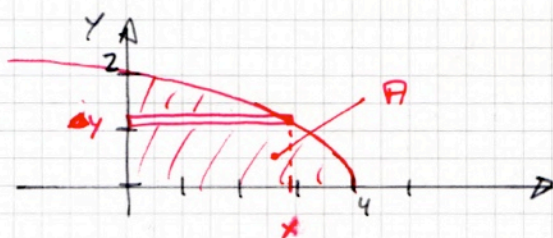
Integration nach y und anders mehr

Nun bestimme die Fläche zwischen der Kurve $y = \sqrt{4-x}$ und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten!



$$\begin{aligned} \text{Es ist } A &= \int_0^4 \sqrt{4-x} \cdot dx = \left[\frac{2}{3} \cdot (4-x)^{\frac{3}{2}} \cdot (-1) \right]_0^4 = \\ &= 0 + \frac{2}{3} \cdot 8 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} = 5\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wir hätten aber auch horizontale Streifen aufsummieren können:



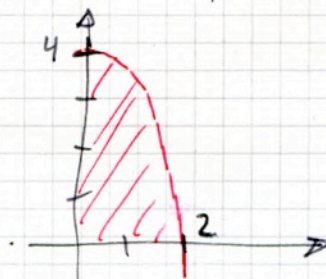
$$\begin{aligned} y^2 &= 4-x \\ x &= 4-y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x \cdot dy = \int_0^2 (4-y^2) \cdot dy = \left[4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 = \\ &= \left(8 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \end{aligned}$$

Vertauschen wir noch die Namen von x und y, so haben wir die Gleichung der Umkehrfunktion von f(x):

$$\bar{f}(x) = 4-x^2$$

Wir haben also das Problem an der 1. Umkehrabbildung gespiegelt.

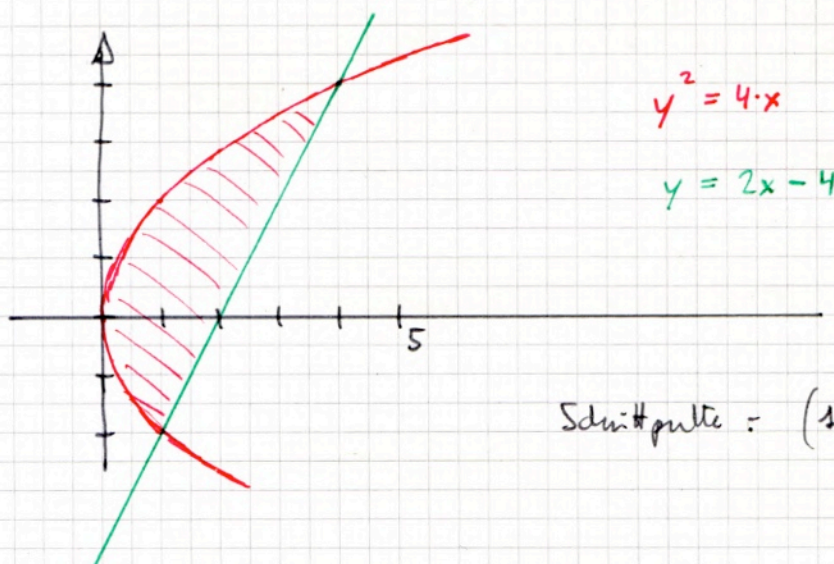


Gerade: Ein eher einfaches Integral.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Kurve $y^2 = 4x$ und der Geraden $y = 2x - 4$ auf zwei Arten:

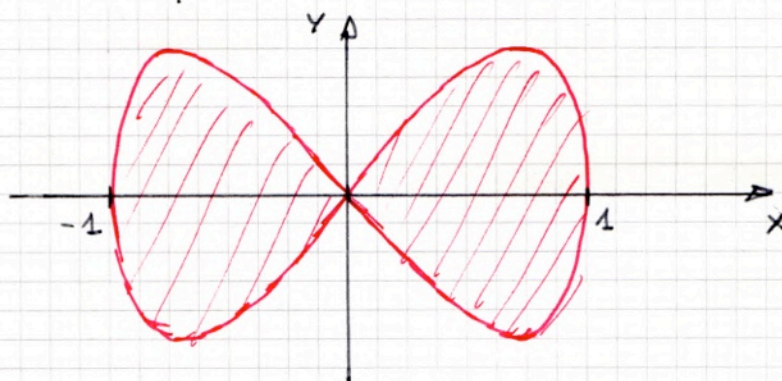
- durch das 'Summieren von vertikalen Streifen'
- durch das 'Summieren von horizontalen Streifen'



Schnittpunkte: $(1/-2)$ und $(4/4)$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die gesamte endliche Fläche, welche von der Kurve $y^2 = x^2 - x^4$ umschlossen wird!



($\rightarrow$ "implicit-plot" oder Stützpunkte für $y = \sqrt{x^2 - x^4}$!)

Zusatz: Bestimmen Sie die Extrempunkte und den Wendepunkt im Nullpunkt.

Aufgabe 3 : Bestimmen Sie die Fläche innerhalb der Schleife der Kurve $y^2 = x^4 \cdot (4+x)$

Aufgabe 4 : Skizzieren Sie die Zykloide, die durch
 $x(t) = t - \sin(t)$ ($x=t$ falls $\sin(t)=0$!)
 $y(t) = 1 - \cos(t)$
 gegeben ist, über dem Intervall $t \in [0, 4\pi]$

Berechnen Sie dann die Fläche unter der Kurve für $t \in [0, 2\pi]$

Wie groß ist die Steigung der Kurve bei $t = 2\pi$?!



$$A = \int_{t=0}^{2\pi} y(t) \cdot dx$$

Aus $x(t) = t - \sin(t)$ erhalten wir durch Ableiten nach t

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos(t) \quad , \quad \text{also}$$

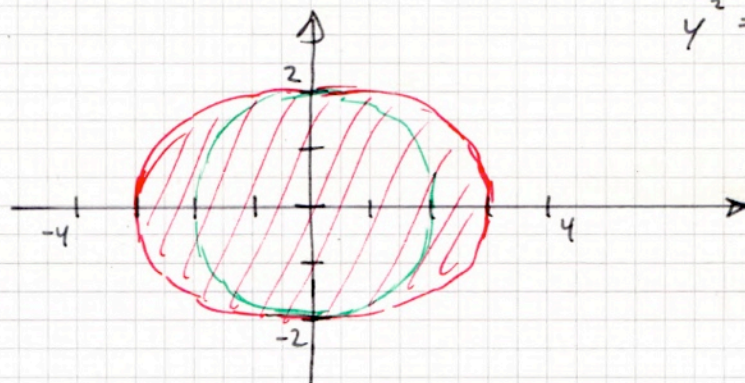
$$dx = (1 - \cos(t)) \cdot dt \quad !$$

$$\begin{aligned} \text{Somit} \quad A &= \int_{t=0}^{2\pi} (1 - \cos(t)) \cdot (1 - \cos(t)) \cdot dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t) \, dt = \dots \end{aligned}$$

$$(\text{Resultat: } A = 3\pi)$$

Aufgabe 5

Welche Fläche wird von der Kurve $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ eingeschlossen?



$$y^2 = 4 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)$$

$$y = \pm 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

Sicher soll man die Symmetrie annehmen:

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \int_0^3 y \cdot dx = 4 \cdot \int_0^3 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \cdot dx = \\ &= 8 \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \left(9 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \sqrt{9 - x^2} \right) \right]_0^3 = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left[(0 + 0) - \left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 0 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \pi = \cancel{\frac{4}{3} \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{6 \cdot \pi}} \end{aligned}$$

Mit wenig "Graphologie" hätten wir das Resultat fast sofort angeben können: Obige Ellipse ist der Kreis um (0/0) mit Radius 2, der mit dem Faktor $\frac{3}{2}$ in x-Richtung gestreckt worden ist:

$$A(\text{rot}) = A_{\text{grün}} \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = \underline{\underline{6 \pi}}$$

Allgemein: Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a und b

$$A = a \cdot b \cdot \pi$$

in schöner Verallgemeinerung der Formel für die Kreisfläche.

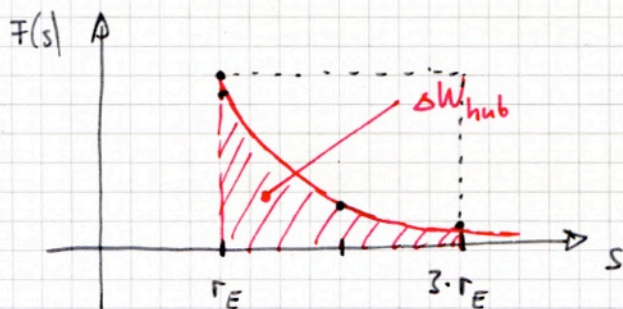
1.3 Einige Anwendungen aus der Physik

a) Die Hubarbeit im Gravitationsfeld

Generell gilt für eine mechanische Arbeitsleistung $\Delta W = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$

Die geleistete Arbeit entspricht 'der Fläche unter der Kurve' im F - s -Diagramm.

Bei einer Hubarbeit im Gravitationsfeld gilt $F(s) = G \cdot \frac{M \cdot m}{s^2}$,
 wo M die große Masse bedeutet, welche das Gravitationsfeld erzeugt,
 und m die kleine Masse, die darin angehoben wird (die beiden
 Rollen sind effektiv vertauschbar !)



$$\begin{aligned}
 W_{\text{hub}} &= \int_{r_E}^{3 \cdot r_E} G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{s^2} \cdot ds = G \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_E}^{3 \cdot r_E} \frac{1}{x^2} \cdot dx = \\
 &= G \cdot M \cdot m \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_{r_E}^{3 \cdot r_E} = G \cdot M \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot r_E} - \frac{-1}{r_E} \right) = \\
 &= G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{3 \cdot r_E} \right) \quad \left(= E_{\text{pot}}(r_E) - E_{\text{pot}}(3 \cdot r_E) \right)
 \end{aligned}$$

Das ist genau $\frac{1}{3}$ der Arbeit, die man mit der Formel für kleine Hübe an der Erdoberfläche berechnet hätte:

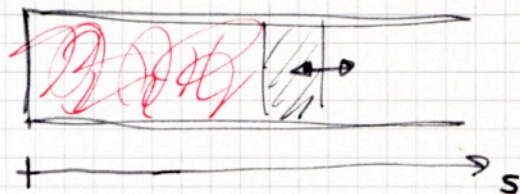
$$m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot \underbrace{\left(\frac{G \cdot M}{r_E^2} \right)}_g \cdot 2 \cdot r_E = 2 \cdot G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_E}$$

b) Die Expansionsarbeit eines idealen Gases

Die Kraft, die der Druck eines idealen Gases auf einen Kolben, mit dem es eingeschlossen wird, ausübt, ist gegeben durch

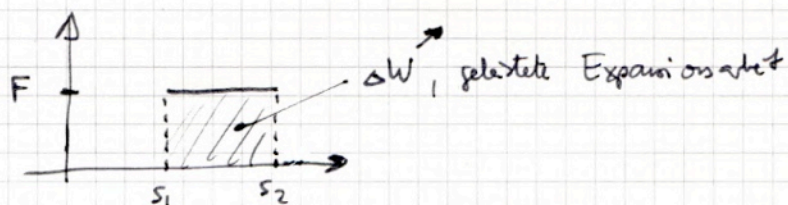
$$F(s) = p(s) \cdot A$$

wo A die Querschnittsfläche des Kolbens ist.



Sie rechnen nun die verschiedenen Spezialfälle durch:

Isobare Expansion $p(s) = \text{konstant} = p$, also $F(s) = p \cdot A = \text{konstant}$



$$\Delta W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = F \cdot \int_{s_1}^{s_2} 1 \cdot ds = F \cdot \left[s \right]_{s_1}^{s_2} = F \cdot (s_2 - s_1)$$

$$\text{sonst } \Delta W = p \cdot A \cdot (s_2 - s_1) = p \cdot (A \cdot s_2 - A \cdot s_1) = \\ = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V$$

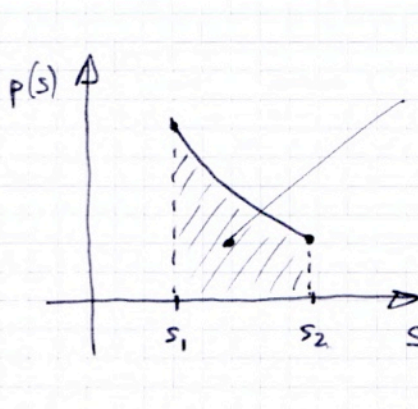
Isotherme Expansion $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$ & $T_1 = T_2$ heißt

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{konstant} \stackrel{!}{=} n \cdot R \cdot T_1 = n \cdot R \cdot T_2 = k$$

mit $V = p \cdot A \cdot s$ folgt $p \cdot A \cdot s = \text{konstant} = k$,

$$p(s) = \frac{k}{A \cdot s} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{F(s) = A \cdot p(s) = A \cdot \frac{k}{A \cdot s} = \frac{k}{s}}}$$

Damit können wir die Expansionsarbeit berechnen:



$$\Delta W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{k}{s} \cdot ds =$$

$$= k \cdot \left[\ln(s) \right]_{s_1}^{s_2} = k \cdot (\ln(s_2) - \ln(s_1))$$

$$= \underline{n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)} = \underline{p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)}$$

Isochore Expansion

Sozusagen gilt es nicht, beim isochoren Prozess bleibt das Volumen definitionsgemäß konstant, das Gas expandiert nicht, $\Delta W = 0$

Adiabatische Expansion

Dieser wichtige Prozess (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung, $\Delta W = -\Delta U$) gehört zur folgenden 'Zustandsgleichung':

$$p \cdot V^\alpha = \text{konstant}, \text{ also } p_1 \cdot V_1^\alpha = p_2 \cdot V_2^\alpha = k = p \cdot V^\alpha$$

$$\text{also } p = \frac{k}{V^\alpha} = \frac{p_1 \cdot V_1^\alpha}{(A \cdot s)^\alpha} = \frac{p_1 \cdot (A \cdot s_1)^\alpha}{A^\alpha \cdot s^\alpha} = \frac{p_1 \cdot s_1^\alpha}{s^\alpha}$$

$$\text{somit } F(s) = p(s) \cdot A = A \cdot p_1 \cdot s_1^\alpha \cdot s^{-\alpha} =$$

$$= p_1 \cdot (A \cdot s_1) \cdot s_1^{\alpha-1} \cdot s^{-\alpha} = p_1 \cdot V_1 \cdot s_1^{\alpha-1} \cdot s^{-\alpha}$$

$$\text{und } \Delta W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot ds = p_1 \cdot V_1 \cdot s_1^{\alpha-1} \cdot \int_{s_1}^{s_2} s^{-\alpha} \cdot ds =$$

$$= p_1 \cdot V_1 \cdot s_1^{\alpha-1} \cdot \left[\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{s_1}^{s_2} = p_1 \cdot V_1 \cdot s_1^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{s_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{s_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)$$

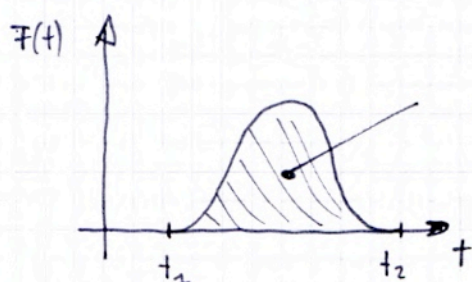
$$= \underline{p_1 \cdot V_1 \cdot \left(\left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{1-\alpha} - 1 \right)}$$

c) Impulsänderung und Kraftstoß

Kennt man den zeitlichen Verlauf einer Krafteinwirkung genau, so kann man die bewirkte Impulsänderung berechnen:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad (\text{Newton Formulierung von } '\vec{F} = m \cdot \vec{a}')$$

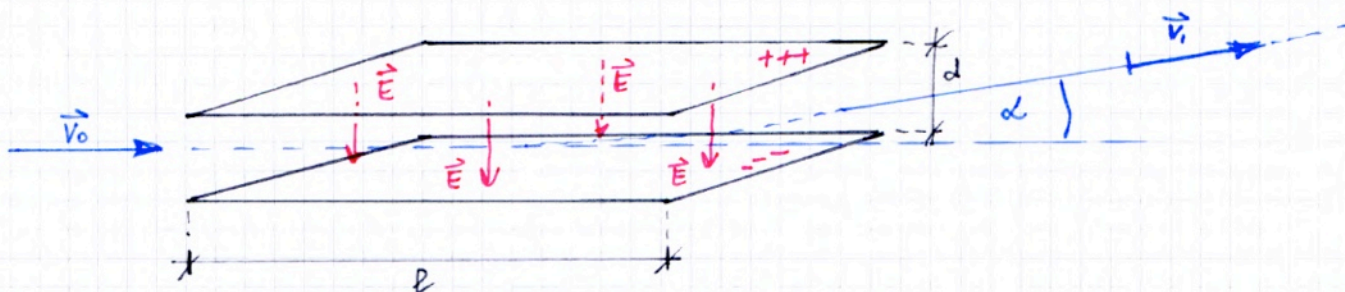
$$dp = F \cdot dt, \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot dt$$



$$\Delta p = \int F(t) \cdot dt \quad \text{"Kraftstoß"}$$

Im folgenden Beispiel ist allerdings die ablenkende Kraft konstant, die Fläche unter der Kurve wird dadurch zu einer Rechteck und lässt sich auch ohne Integralrechnung bestimmen ...

Beispiel: Elektronen in einer Röhre werden durch die Spannung U_B beschleunigt und fließen dann zwischen den Platten eines Kondensators durch, an dem die Ablenkspannung U_A liegen soll. Um welchen Winkel α werden die Elektronen dadurch abgelenkt?



- v_0 ist durch die Beschleunigungsspannung bestimmt:

$$e \cdot U_B = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}}$$

- Da die Kräfte nur vertikal wirken, bleibt die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit konstant. Die Durchflugszeit Δt ist also

$$\Delta t = l / v_0$$

- Während dieser Zeit wirkt die (konstante) Kraft $F = e \cdot E$ vertikal nach oben, sagen wir in die y -Richtung.

- Es ist also $\Delta p_y = p_{y2} = \int F_y(t) \cdot dt = e \cdot E \cdot \int dt =$
 $= e \cdot E \cdot (t_2 - t_1) = e \cdot E \cdot \Delta t = e \cdot E \cdot l / v_0$

- Damit ist $v_{2y} = p_y / m_e = \frac{e \cdot E \cdot l}{v_0 \cdot m_e}$

- Den Ablenkwinkel α erhalten wir nun über seine Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{\frac{e \cdot E \cdot l}{v_0 \cdot m_e}}{v_0} = \frac{e \cdot E \cdot l}{m_e \cdot v_0^2} = \\ &= \frac{\cancel{e} \cdot E \cdot l}{\cancel{m_e} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{e} \cdot U_B}{\cancel{m_e}}} = \frac{E \cdot l}{2 \cdot U_B} \end{aligned}$$

- Ist der Abstand der ablenkenden Platten d , so gilt $E = \frac{U_B}{d}$.
Setzen wir das noch ein:

$$\tan(\alpha) = \frac{U_B \cdot l}{U_B \cdot 2 \cdot d}$$

Die Platte und die Ladung der Teilchen fallen aus der Rechnung.
Wichtig ist aber, dass sie eine Ladung haben ...

d) Pro Denoia: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ist $s(t)$ die Bahn eines Massenpunktes, so gilt

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \end{aligned}$$

Umgekehrt liefert die Integralrechnung zu einer Funktion $a(t)$ die Geschwindigkeit $v(t)$ und den Ort $s(t)$ bis auf die Bestimmung ~~der~~ Integrationskonstanten. Diese sind aber ohnehin willkürlich, sie reflektieren nur die Wahl des Inertialsystems, genau der Nullpunkte auf den Orts- und Zeitachsen.

Ist also $a(t)$ gegeben, so gilt

$$v(t) = \int a(t) dt + v_0$$

$$s(t) = \int v(t) dt = \iint a(t) \cdot dt + v_0 \cdot t + s_0$$

Sie können heute einfach die 3-d-Bewegung ab. eines Modell-Eisenbahnwagens aufzeichnen: Lassen Sie ein iPhone mitfahren, dass kann die Beschleunigungen in x, y und z-Richtung laufend aufzeichnen.

Durch Integration können sie dann den Verlauf der Geschwindigkeit und die gefahrene Strecke rekonstruieren!

Aufgaben:

→ § 34 von "Differential- und Integralrechnung"
Frank Ayres
Schaum's Outline, McGraw-Hill Book Company GmbH
3. deutsche Ausgabe 1982

Weitere Beispiele und Aufgaben findet man sowohl im Lehr- und Arbeitsbuch "Mathematik für Ingenieure" Bd. 1 von Lothar Papula (Vieweg Verlag, 1991⁶) als auch in zugehörigen Übungsbuch "Übungen zur Mathematik für Ingenieure" (gleicher Verlag).

Der Schutz der Urheberrechte verbietet es, diese Aufgaben hier zu publizieren.